ELEMENTI

DI

FISICA.

ELEMENTI

DI FISICA

ESPOSTI

DAL PROF. M. ZANNOTTI.

SECONDA EDIZIONE

INTERAMENTE RIFATTA DALL'AUTORE SOPRA UN NOVELLO DISEGNO.

> A magnitudine speciei et creaturae cognoscibiliter poterit Creator horum videri.
>
> *De libro* SAPIENTIÆ.

TOMO PRIMO.

NAPOLI
TIPOGRAFIA DI FEDERICO VITALE
Largo Regina Coeli n° 2.
1849.

PREFAZIONE.

La 1ª edizione di quest'opera portava il titolo di *Fisica positiva*. Nel leggere il manifesto, che l'annunziava, alcuni dicevano di non comprendere lo scopo di questo aggiunto; ed io compativa costoro, perchè privi di cognizioni fisiche: altri non ignari della scienza, facevano un sorriso di compassione non al pleunasmo del titolo (oh! io era pur sicuro che la lunga consuetudine delle ipotesi non l'avrebbe lasciato avvertire),ma al tentativo da forsennato, com'essi dicevano, di voler esporre le dottrine fisiche prescindendo da ogni principio ipotetico. A costoro non si conveniva altra risposta che quella di continuare la pubblicazione dell'opera, dalla cui lettura avrebbero appreso che poteva essere un fatto ciò ch'essi avevano creduto impossibile. Così mi trovava a dover imitare la dialettica di Diogene contro gli argomenti di Zenone: egli passeggiava, mentre lo scettico si sforzava a pruovare l'impossibilità del moto. Ma quando un fisico di prim'ordine, l'illustre scovritore della termocrosi, prese a difendere i sistemi ipotetici, come utili al progresso

della Fisica; allora, senza ledere in menoma parte il rispetto dovuto ad uno scienziato di tanta rinomanza, mi vidi nell'obbligo di dichiarare non solo la nullità di tali sistemi, ma eziandio il danno ch'essi hanno recato al merito logico della scienza [1]. Un uomo che di dottrina non avesse altro posseduto che un'usurpata riputazione, si sarebbe offeso delle obbiezioni che si osavano fare ai suoi responsi: ma il cav. Melloni che alla profondità del sapere nelle scienze fisiche congiunge la modestia del vero dotto, mi diè animo a proseguire nel mio lavoro col divenirmi benevolo di non dubbie prove della sua stima.

Galileo dapprima, indi gli accademici del Cimento gettarono le fondamenta della sana Fisica, richiamandola ai suoi veri principî, col farne un sistema di cognizioni sperimentali. E posta una volta sulla vera linea di progresso, ha potuto in duecento anni farsi ricca di un numero prodigioso di capitali scoverte, dopochè ventidue secoli di sterili quistioni ne avevano fatto un miserabile giuoco di parole. Col dare alla Fisica l'aggiunto di *positiva* ho inteso rammentare questa verità storica ai fisici specialmente italiani; e le difficoltà, cui sono andato incontro, hanno dimostrato che ne faceva mestieri. Ma in realtà l'aggiunto di *positiva* alla Fisica è tanto superfluo, quanto quello di *razionale* alla Matematica.

Se ai tempi di Galileo conveniva dare l'epiteto di sperimentale alla Fisica, ciò era in opposizione ai dommi aristotelici con cui si pretendeva conoscere la Natura *a priori*. Ma dopochè la Fisica ha preso la sua vera strada, ed è divenuta la scienza sperimentale per eccellenza, l'epiteto che dichiara il suo attributo essenziale, è divenuto assolutamente inutile. E se i fisici francesi sotto la denomina-

[1] Vedi la 1ª edizione di quest'opera a pag. 438.

zione di *Fisica sperimentale* pubblicano i loro trattati elementari su questa scienza, fanno ciò per distinguere gli elementi da un altro ordine di cognizioni che va sotto il nome di *Fisica matematica*. Coloro che ignorano le presenti condizioni della scienza e che in conseguenza non conoscono ciò che si vuol esprimere coll'aggiunto di *matematica*, chiamano con questo nome quelle esposizioni elementari, in cui osservano qualche dimostrazione tolta anche dalle prime nozioni delle scienze esatte: che se poi vi si scorgesse, il Ciel ne liberi, un segno integrale, allora si dirà che l'autore fa uso di *calcolo sublime*, ed il povero editore dovrà implorare la carità dei pizzicagnoli, se vuole liberarsi dall'imbarazzo di un enorme fardello di carta stampata. Che il Signore Iddio abbia voluto accettare in iscomputo dei miei peccati ciò che mi è toccato sentire a questo riguardo! Forse da persone estranee alla scienza? Oh! non sarei stato poi tanto rigido da pretendere un giudizio esatto da chi ignora la cosa che intanto vuol giudicare. Ma io inviava, per esempio, in dono(già si intende)una copia della mia Fisica a qualche dotto, e fingiamo nel Kamtschatka: dopo qualche tempo l'orrevole scienziato mi faceva sapere di aver letto con ammirazione il mio *egregio*(quest'aggettivo mi faceva sollevare un poco il viso, poichè un tantino di vanità l'abbiamo tutti) trattato di Fisica, e mentre io mi aspettava la parola *positiva*, leggeva in vece *matematica*. Quest'ultimo aggettivo mi curvava piucchè non mi avesse raddrizzato il primo, poichè mi dichiarava o che l'onorando uomo non aveva letto la mia opera, o che io non aveva saputo dimostrare con sufficiente chiarezza che le scienze esatte sono elementi inseparabili dalla Fisica del secolo XIX. Ma perchè, dirà forse taluno, tanta pena per un qualificati-

vo?— Eh veggo bene, mio caro, che la Provvidenza non ha voluto che voi vi lucraste la vita coll'insegnamento; ed in conseguenza non conoscete i raggiri dei trafficanti di scienza. Quando un grosso dottore ha pronunziato che la tale opera è un trattato di Fisica matematica, questa proposizione è successivamente ripetuta dall'immensa schiera di coloro che credono aver diritto di parlare, perchè hanno l'organo vocale. Or un'opera simile non può essere un libro di rudimenti pei giovani medici, i quali debbono apparare un poco di Fisica, perchè la Regia Università degli studî ne chiede un esame; che se non ci fosse questo intoppo al grado dottorale, non pochi studenti di Medicina saprebbero divenire dottori fisici senz'apprendere neppure la ragione del titolo. E quando anche vi si menasse buona per gli studenti di medicina, vorreste insegnare Fisica matematica ai giovani farmacisti, sopra cento dei quali appena dieci si stimano nel dovere di saper leggere un numero? E poi l'autore di una Fisica matematica potrà fare a meno di esser *sublime* nelle sue lezioni? — Ed ecco come a furia di *egregio, matematico* e *sublime* tendono ridurvi al silenzio.

Vediamo dunque di spiegarci più chiaramente.—1°Quantunque la Fisica sia una scienza eminentemente sperimentale, purtuttavia se l'esperienza vi offre il fatto, non vi lascia scorgere la sua relazione colle forze che lo producono, e quindi coi fenomini congeneri. La macchina di Atwood, per esempio, vi dimostrerà che nella discesa dei gravi gli spazî sono come i quadrati dei tempi; ma non potrà mai dichiararvi che questo fatto è una conseguenza dell'energia costante della gravità a piccole distanze dalla superficie terrestre. Un esperimento semplicissimo vi mostrerà ancora che per un medesimo liquido la

pressione sul fondo orizzontale di un vase è in ragione dell'estensione del fondo e dell'altezza del liquido sovrastante; ma potrete poi in questo esperimento scorgere l'effetto del principio di *egual pressione*? Or la scienza sta propriamente in queste vedute dello spirito, le quali non possono formarsi nella mente senza l'opera della Matematica. E non volendo ripetere la stessa osservazione sopra cento altri esempî, bastano i suindicati per dimostrare che la principale funzione delle scienze esatte nelle ricerche fisiche, consiste nel dichiarare la dipendenza dei fenomeni, congiungendo la ragione del fatto al calcolo delle forze che lo producono. Quindi comprendiamo come una branca della Fisica possa semplificarsi al segno di racchiudersi tutta in una formola: così la teorica della gravità sotto l'espressione $\frac{mg}{d^2}$ comprende la ragione di tutti i fenomeni meccanici del sistema planetario. E la scienza fisica allora si potrà dire perfetta, quando tutta intera altro non sia che un ramo di Meccanica applicata. Privare dunque la Fisica del sussidio delle scienze esatte sarebbe lo stesso, se mai fosse possibile, che farla retrocedere di due secoli.

2° Sovente il semplice fatto voi non lo potete ottenere senza essere coadiuvato dal calcolo. Le ricerche igrometriche, per esempio, suppongono che il fisico conosca la tensione del vapore acqueo per una certa estensione della scala termometrica di decimo in decimo di grado. Or è impossibile far variare la temperatura di una data massa di vapore per decimi di grado, ed in modo ch'essa divenga stazionaria pel tempo che fa d'uopo alla lettura degli strumenti. L'esperimento in questo caso non può darvi che taluni valori della serie che voi volete determinare,

il resto non può altrimenti ottenersi che mediante una formola d'interpolazione — Altre volte l'esperimento suppone talune circostanze, che se non hanno luogo al momento di eseguirlo, non possono essere prodotte a piacere del fisico. Volendo, per esempio, determinare la densità di un gas, è d'uopo cercarla a 0° di temperatura e sotto la pressione atmosferica 0m,76, termini stabiliti come condizioni normali dell'esperimento. Intanto l'aria avrà la temperatura di 24°, ed il barometro segnerà 0m, 68. Di grazia, sapreste voi suggerire un espediente buono a rendere l'atmosfera più fredda e più pesante? — E se ciò non potete ottenere, non vi resta altra via che quella di eseguire l'esperimento nelle condizioni atmosferiche quali esse sono, e poi col calcolo ridurre i risultamenti a quel che sarebbero stati nelle circostanze stabilite come normali.

3° Tutti gli apparecchi misuratori, le cui indicazioni sono determinate dal concorso di più cagioni, non di rado opposte, sono un imbarazzo di più pel fisico che ignora il modo d'isolare col calcolo la parte dovuta alla sola cagione ch'egli considera: tali sono a modo di esempio, il barometro, il psicrometro, ec. Altri strumenti della stessa specie e non meno importanti, non danno colle loro indicazioni immediatamente la misura che cercate, ma vi offrono la determinazione di taluni valori in funzione dei quali il calcolo vi darà poi la misura richiesta: e basta per tutti citare il galvanometro. L'ignoranza della Matematica nell'uso di questi strumenti ha talvolta dato luogo ad errori da far pietà, e che io vi citerei, mio caro lettore, in sostegno della mia proposizione, se potessi farlo senza ledere il prossimo.

4° Nella scienza fisica vi hanno principî trovati per

semplice intuizione, e la cui realtà, d'altronde indubitabile, non può nulladimeno esser direttamente dimostrata da veruno esperimento. In questa categoria vanno la legge dei galleggianti, il principio di egual pressione, le leggi geometriche della riflessione e rifrazione della luce ec. Voi per esempio, vorrete con un esperimento assicurarvi della verità del principio di Archimede sulla legge di equilibrio dei galleggianti. Da un meccanico, che suppongo abile quanto Fortin, farete costruire un cilindro cavo, in cui entri esattamente un egual cilindro massiccio. Porrete i due cilindri l'uno nell'altro, e li adagerete in modo sulla coppa di una sensibile bilancia che le loro basi siano perfettamente orizzontali. Dopo aver equilibrata la bilancia, caverete il cilindro massiccio dal cave, e fermatolo alla coppa con un filo, lo farete pescare in un bicchier di acqua. Allora vedrete la bilancia inclinare dal lato opposto, e ciò v'indicherà che il cilindro immerso nel liquido riceve da questo una spinta dal basso in alto. Per determinare il valore di questa spinta, voi empirete d'acqua il cilindro cavo, e se il principio di Archimede è vero, la bilancia dovrà tornare all'equilibrio. Or questa pruova non potrà riuscirvi se non per puro azzardo; poichè due gocce di più o di meno non faranno variare l'altezza del livello all'occhio più esperto in simili ricerche, ed il peso di due gocce di acqua eccede il limite di sensibilità di una buona bilancia. Voi avete usata la massima diligenza nello sperimentare, ed essa non ha fatto che generare nel vostro spirito una maggiore incertezza: e quando anche foste riuscito nella pruova, avreste dovuto sempre riguardare il principio come esatto tra i limiti di errore dell'esperimento. La realtà di tali principî non può essere altrimenti dichiarato, se non col farne dati di un cal-

colo, diretto a svolgerne tutte le possibili conseguenze; e nell'esatta coincidenza dei risultamenti algoritmici coi dati sperimentali il fisico troverà una dimostrazione evidente della realtà del principio donde è partito.

Or la Fisica sì fattamente ausiliata dalle scienze esatte, costituisce la *Fisica sperimentale* degli autori francesi: tali sono le celebrate opere di Pouillet, Lamé, Péclét, ec. E che sarà dunque la *Fisica matematica*?—Per comprendere nettamente ciò che si vuol dire con quest'ultima denominazione, fu d'uopo rammentarsi quel che sopra ho detto; cioè che la meta di perfezione della Fisica sta nel divenire un'applicazione di Meccanica razionale ai fenomeni naturali. La dottrina della gravitazione ha già raggiunta questa meta di perfezione; quanto alle altre branche della scienza non si hanno che tentativi più o meno felici, i quali non si possono ancora che in parte formolare sotto quegli enunciati generali che soli possono introdurli nel sistema di una sintesi espositiva: tali sono i grandi lavori di Fourier sul calore; di Poisson sulle forze molecolari, sul calore, sull'elettro-statica; di Ampère sull'elettro-dinamica; di Ohm sulla pila voltaica,ec. Dopo ciò onorare col titolo di *Fisica matematica* una semplice istituzione elementare, la quale in vece delle solite rapsodie cerchi esporre col necessario rigor logico le fondamentali nozioni della scienza, è lo stesso che tornare alla torre di Babele.

Mi resta ora a dir qualche cosa su questa 2ª edizione,la quale non è una ristampa, ma un'opera rifatta per intero. Se io sia riuscito nell'intento di produrre un lavoro migliore del primo, spetta a voi il giudizio, mio caro lettore: non posso guarentirvi altro che la mia buona fede nel credere di aver fatto meglio; e vi sia di pruova il non avere

voluto risparmiare la non lieve opera di una novella incisione di tutte le tavole.

Nella persuasione che fosse infinitamente più facile comprendere una dimostrazione matematica, anzichè rinvenirla, io aveva cercato nella 1ª edizione non impiegar mai formola che non avessi già dimostrata; e le poche volte che non potei far di meno del calcolo differenziale ed integrale, usai carattere più piccolo per rendere avvertito il lettore(come lo aveva già detto nella prefazione)di lasciar la lettura di quel paragrafo, se di Matematica non conosceva oltre gli elementi. Questo metodo, che io aveva visto praticato in diverse opere, mi era sembrato lodevole; ma sventuratamante non ebbi che l'approvazione di pochissimi. Quasi tutti coloro che mi fecero l'onore di leggere la mia opera, furono di avviso che il testo doveva contenere soltanto l'enunciato e la discussione, ove facesse mestieri, della formola; ma che le dimostrazioni andavano rimesse in apposite note alla fine del volume. In questa 2ª edizione ho messo in pratica il loro consiglio, e nel testo non si trovano altre dimostrazioni, che brevissime e tolte dai primi elementi della Matematica, senza dei quali non è possibile rendere ragione dei fenomeni più semplici.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE IN QUESTO PRIMO VOLUME.

LIBRO PRIMO.

Nozioni di Meccanica razionale.

LIBRO SECONDO.

Gravità.

LIBRO TERZO.

Forze molecolari.

SEZIONE I.

Attrazione molecolare.

SEZIONE II.

Del calore considerato nei suoi effetti molecolari.

LIBRO QUARTO.

Applicazione delle teoriche esposte nei libri precedenti alle leggi di equilibrio e movimento dei fluidi, ed alla misura delle densità.

SEZIONE I.

Equilibrio dei fluidi.

SEZIONE II.

Idrodinamica.

SEZIONE III.

Misura delle densità.

LIBRO QUINTO.

Acustica.

NOTE

AL PRIMO VOLUME.

LIBRO PRIMO.

NOZIONI DI MECCANICA RAZIONALE.

Tutti i cangiamenti del mondo fisico
possono ridursi a movimenti.
ARISTOTILE.

CAPO PRIMO.

Definizioni.

1. Ogni fenomeno del mondo fisico non è che moto prodotto in un corpo mediante l'azione di un altro. Così l'azione della gravità terrestre sulle gocce di acqua, formate in seno dell'atmosfera, produce il fenomeno della pioggia; l'attrazione del sole e della luna sulle acque del mare genera le maree, ec. E se talvolta il movimento è insensibile, non lo sono egualmente i suoi effetti: se non possiamo, per esempio, osservare il moto interno che costituisce la nutrizione di un essere organico, se in una soluzione di sale non possiamo vedere l'aggrupparsi delle molecole nell'atto della cristallizzazione; purtuttavia il fatto della nutrizione ed il deposito di cristalli sul fondo del recipiente ci dimostrano evidentemente che un moto si è compiuto.

2. Gli effetti di queste mutue azioni della materia possono differire di quantità o di natura. Tutti i corpi, sebbene con diversa energia, si dilatano per l'azione di un corpo caldo, e viceversa si restringono sotto l'azione di un corpo freddo. Al contrario il fenomeno della combustione così facile a prodursi in un legno

secco, è impossibile che si manifesti in un pezzo di marmo. Vi sono dunque fenomeni indipendenti dalla natura dei corpi, ed altri viceversa che ne dipendono: lo studio de' primi forma l'obbietto della *Fisica*, e quello dei secondi appartiene alla *Chimica* [1].

3. Il moto, in cui si risolve ogni fenomeno, prende diverse forme, secondo varia la natura dell'azione che lo produce. Una piuma leggiera è attratta dalla ceralacca strofinata con panno di lana, e l'azione del fuoco dilata un metallo. Sì l'uno che l'altro fenomeno non è che moto, ma eseguito sotto due forme differenti. E se nei fenomeni facciamo astrazione da queste speciali modificazioni, allora non avremo a considerare i corpi che sotto l'idea generale di materia in movimento. Or la scienza dei fenomeni naturali veduta sotto questo semplicissimo aspetto costituisce la *Meccanica razionale.*

4. La natura non presenta che fatti complessi ed apparentemente isolati. Sul fenomeno in apparenza così semplice della caduta di un grave in seno dell'atmosfera influiscono la latitudine del luogo e la sua elevazione sul livello del mare, la forma, massa e densità del grave, il grado di calore e densità dell'aria, la composizione geologica del suolo, la vicinanza di grandi masse di montagne e la natura dei minerali che le compongono; e mentre sembra che il fenomeno non potesse avere nulla di comune colla forma del nostro pianeta e colla natura della curva ch'esso descrive intorno al sole, la teoria della gravità fa conoscere che questi tre fenomeni non sono che forme differenti di un solo fatto.

Per determinare quali circostanze possono influire sulla produzione di un fenomeno, quanta parte vi prenda ciascuna di es-

[1] La scienza della Natura si divide in due grandi sezioni, l'una descrittiva che ci fa conoscere tutte le famiglie degli esseri componenti il mondo fisico, l'altra teoretica che ci dimostra le leggi delle loro mutue azioni. La prima, che va detta *Cosmografia*, comprende l'Astronomia descrittiva, la Geografia, la Zoologia, la Botanica, la Mineralogia: la seconda si distingue in Fisica e Chimica. Tutte le altre forme della Scienza naturale non sono che diverse combinazioni degli elementi primi di queste due grandi sezioni.

se, e con quale mutua dipendenza sono coordinati i fatti naturali, lo spirito umano ha dovuto primieramente separare coll'analisi ciò che la Natura presenta in una sintesi compatta; indi studiare accuratamente ciascun elemento di un fenomeno per rilevarne i caratteri distintivi, che ne mostreranno l'identità in mezzo alle moltiplici combinazioni, le quali sovente lo intrecciano in modo con altri fatti elementari da distruggere quasi per intero i segni della sua presenza; in fine combinare questi varî elementi tra loro, e nella loro mutua influenza scovrire le ragioni dei fatti, e quindi gli occulti legami che rendono UNA la Natura. Da questo alto grado di perfezione la scienza fisica è tuttavia ben lontana, ma pertanto essa non lascia di progredire, per toccare forse un giorno la sua meta; e se oggi neppure ipoteticamente abbiamo l'unità della scienza fisica, purtuttavia si è fatto un immenso progresso col ridurre a pochi tipi generali l'intera classe dei fenomeni conosciuti. Esporre con tutta la severità logica questa sintesi di riduzione, a cui la scienza può elevarsi nel suo stato attuale, costituisce l'essenza di un lavoro didattico; e poichè la sintesi procede necessariamente dal semplice al composto, così nell'applicarsi alla composizione di un trattato di Fisica, essa deve muovere dall'esposizione dei principî della Meccanica razionale per poi giungere alla spiegazione dei fenomeni meteorologici; vale a dire ch'essa deve cominciare dall'esame dell'elemento primo di ogni fenomeno, ch'è il moto, per arrivare alla dichiarazione di essi fenomeni, quali vengono prodotti dall'azione congiunta delle forze naturali.

5. Incominciando dal considerare i fenomeni sotto questa veduta semplicissima non dovremo supporre altra cognizione dei corpi, che quella di talune loro proprietà generali, quali ci vengono dichiarate dalle più ovvie osservazioni: tali sono l'*estensione*, l'*impenetrabilità*, la *porosità*, la *divisibilità*, l'*inerzia* [1].

[1] Le proprietà generali dei corpi aumentano di numero come la Fisica progredisce. Prima che Colladon e Sturm avessero dimostrato che tutti i liquidi diminuiscono di volume sotto una conveniente pressione, la *compres-*

Ogni corpo è *esteso*, vale a dire che ogni corpo occupa una parte dello spazio, definita di forma e quantità, vale a dire di figura e volume; ed i fenomeni dell'urto e della pressione ci dimostrano che lo spazio definito da un corpo non può essere contemporaneamente occupato da un altro. Purtuttavia se noi prendiamo un tubo di vetro chiuso in un estremo, ne empiamo una metà di acqua ed il rimanente di alcool, e poi chiudendo con un dito l' estremità aperta lo capovolgiamo a più riprese: osserveremo, quando il tubo sarà ridotto al riposo, una diminuzione nel volume dei due liquidi. Questa compenetrazione non è che apparente, poichè la massa di un corpo qualunque non è un tutto continuo, ma è invece interrotta da piccoli e numerosi spazî voti, ai quali si è dato il nome di *pori*. Sono essi visibili nel legno ed in molte specie di pietre; ed ove la loro estrema picciolezza li sottrae dal potere della vista, la loro esistenza è dichiarata da fatti che necessariamente ne dipendono. Così la diminuzione di volume che si osserva nel raffreddamento di un corpo qualunque è una pruova evidente della sua *porosità*.

Se da frequenti osservazioni abbiamo appreso che ogni corpo è *divisibile* in parti piccolissime; gli odori, le sostanze coloranti, le osservazioni microscopiche sul regno organico e le reazioni chimiche ci hanno dimostrato che la loro tenuità è impossibile ad immaginarsi. E siano i corpi infinitamente piccoli o grandi, essi tendono tutti a durare nello stato di quiete o di moto, in cui si trovano. Così vediamo che un corpo lasciato in dato luogo vi persiste, finchè non ne venga rimosso dall'azione di un

sibilità non si era sperimentata che nei solidi, nei corpi aeriformi e nell'acqua, e perciò non si poteva riguardare come una proprietà generale dei corpi. Dobbiamo dire altrettanto della suscettibilità di svolgere la forza elettrica, dell'attitudine a riflettere il calore e la luce secondo una legge geometrica, ec. In conseguenza la numerazione completa delle proprietà generali dei corpi finora conosciute, anzichè trovar luogo nei preliminari della scienza, deve invece risultare da un rendiconto che lo studioso farà a se stesso dopo aver seguito attentamente un corso di Fisica.

altro; e se lanciando un corpo, osserviamo il suo moto continuamente rallentarsi fino a distruggersi del tutto, ciò provviene dalla resistenza dell'aria e dall'attrito. L'esperienza in vero ci dimostra che diminuendo continuamente queste resistenze, il moto diviene più durevole; sarebbe dunque perpetuo, se non incontrasse verun ostacolo. D'altronde comparando le attuali osservazioni astronomiche colle più antiche tramandateci dalla storia, noi troviamo che per ventiquattro secoli almeno le durate del giorno e dell'anno non hanno variato, vale a dire che in tanto intervallo di tempo la terra ha conservato la stessa celerità di rotazione intorno al suo asse e di traslazione intorno al sole. Quest'impossibilità, in cui è la materia, di potersi dare da se medesima il moto o la quiete, vien disegnata col nome d'*inerzia*.

6. Non potendo un corpo dare a se medesimo il moto o la quiete, è necessario riguardare l'avvenimento di una di queste modificazioni come l'effetto di una cagione estrinseca al corpo, e che ha ricevuto il nome di *forza*. Questa può essere *movente* o *resistente*, secondochè tende a produrre il movimento, ovvero a distruggere quello che già esiste: così una macchina riceverà la forza movente dal vento, dall'acqua, dal vapore, ec. e porzione di questa forza verrà poi distrutta dall'attrito del meccanismo che dovrà trasfondere il moto nella resistenza da vincersi.

Se l'inerzia della materia ci fa conoscere l'esistenza di una forza estrinseca nell'atto della comunicazione del moto, l'analogia poi ci obbliga a riguardare come manifestazioni di forze speciali tutte le azioni dei corpi, in quanto che sono produttrici di fenomeni, ossia di movimenti: così diciamo che la *forza del calore* dilata i corpi, la *forza attraente* della terra ritiene la luna nella sua orbita, ec. Dimodochè riguardiamo come forza tutto ciò che produce moto o tende a produrlo.

Le forze si distinguono in *continue* ed *istantanee;* e le prime si suddividono in *permanenti* e *temporanee*. Le forze continue ripetono incessantemente la loro azione sulla materia; e poichè i movimenti ch'esse producono, aumentano di celerità col-

la durata, così hanno ricevuto ancora il nome di *forze acceleratrici*. Talune di queste forze sono compagne indivisibili della materia, e per ciò si dicono *permanenti*; altre si svolgono e si conservano sotto certe speciali condizioni, come il calore, l'elettricità, il magnetismo, e si distinguono coll'aggiunto di *temporanee*. Le forze istantanee poi, denominate ancora *forze d'impulso*, sono quantità indipendenti dal tempo, e con un sol atto si trasfondono nel corpo che vanno ad animare.

L'effetto di una forza è quello di spingere un corpo secondo una linea retta [1] e con una certa *velocità*; la quale sarà costante, se la forza movente è istantanea, e sarà varia se la forza è continua. Nel primo caso il mobile percorrerà spazî eguali in tempi eguali, ed il moto si dirà *uniforme*; nel secondo caso a tempi eguali corrisponderanno spazî diseguali ed il moto si dirà *vario*, *accelerato* o *ritardato* secondochè la successione degli spazî formerà una serie crescente o decrescente.

CAPO SECONDO.

Relazione tra spazio, tempo e velocità.

7. Dall'essere la velocità costante nel moto uniforme segue che se un corpo percorra v unità di spazio nel tempo 1, ne farà $2v$ nel tempo 2, ed in generale tv nel tempo t; quindi denominando s la somma delle unità di spazio, avremo

$$s = vt.$$

[1] L'idea del moto uniforme, come effetto di una forza d'impulso, è conseguenza necessaria dell'idea d'inerzia; ma non possiamo dire altrettanto dell'idea che ci presenta il moto come naturalmente rettilineo. I meccanici hanno creduto poterla derivare da un principio razionale, dicendo non esservi ragione, per cui un corpo animato da una forza dovesse deviare in un senso piuttosto che in un altro. Senza intrattenerci sull'impossibilità di conoscere le leggi fisiche *a priori*, noi lasciamo agl'ideologi la quistione sull'origine di tale idea, e ci contentiamo come fisici di farne rilevare la realtà obbiettiva; la quale è compiutamente dichiarata dall'accordo perfetto e costante tra i fenomeni meccanici dei corpi ed i risultamenti del calcolo, che muove da essa idea, come da principio fondamentale.

Dunque nel moto uniforme lo spazio è rappresentato da un prodotto, di cui sono fattori l'espressioni numeriche del tempo e della velocità. In conseguenza dati i valori dello spazio e della velocità, $\frac{s}{v}$ darà quello del tempo; e viceversa dando lo spazio ed il tempo, $\frac{s}{t}$ rappresenterà la velocità, che in conseguenza è stata definita *il rapporto dello spazio al tempo*, definizione che conviene soltanto al moto uniforme.

Ciò posto, supponiamo due spazî s ed s' percorsi nello stesso tempo t colle velocità v e v'; avremo

$$s = vt,\ s' = v't,$$

donde

$$s : s' = vt : v't = v : v';$$

dunque nel moto uniforme gli spazî descritti in un medesimo tempo sono proporzionali alle velocità.

Supponendo ancora due spazî s ed s' percorsi colla velocità v nei tempi t e t', avremo

$$s : s' = vt : vt' = t : t';$$

dunque nel moto uniforme gli spazî percorsi colla stessa velocità sono proporzionali ai tempi.

Supponendo in fine due spazî eguali percorsi in tempi differenti e quindi con velocità diverse, si avrà

$$s = vt,\ s = v't',$$

quindi

$$vt = v't',\ \text{e}\ v : v' = t' : t,$$

ossia che per un medesimo spazio i tempi saranno in ragione inversa delle velocità.

8. Perchè l'equazione $s = vt$ sia soddisfatta nel moto vario; basta sostituire gl'infinitesimi del tempo e dello spazio ai loro valori finiti. Ed in vero, quantunque sotto l'azione di una forza continua la velocità riceva in ogni infinitesimo di tempo un aumento o una diminuzione, secondochè la forza è movente o

resistente, purtuttavia nell'indivisibile durata di quel tempo infinitesimo la velocità deve riguardarsi come costante; ed in conseguenza essendo v la velocità colla quale l'elemento di spazio ds sarà percorso nell'elemento di tempo dt, avremo

$$ds = v.dt,$$

donde

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Dunque nel moto vario la velocità è data dal rapporto che passa tra l'elemento dello spazio e quello del tempo. La stessa definizione può convenire ancora al moto uniforme, poichè dividendo per un numero infinitamente grande i due termini della frazione $\frac{s}{t}$ che rappresenta il valore di v, essi diverranno infinitesimi senza che il loro rapporto sia alterato; avremo così $v = \frac{ds}{dt}$, e la definizione precedente resta esatta per ogni specie di movimento. È d'uopo però riflettere che nel moto uniforme il rapporto $\frac{ds}{dt}$ è costante in tutta la durata del moto, mentre che in quello prodotto da una forza continua $\frac{ds}{dt}$ è funzione del tempo.

CAPO TERZO.

Misura delle forze.

9. Le forze sono note soltanto pel loro effetto, vale a dire per le velocità che possono produrre. E sebbene la proporzionalità della velocità alla forza, come quella di un effetto alla sua cagione, sia un principio razionale, purtuttavia la cognizione della funzione matematica che deve comporre i termini della proporzione è necessariamente empirica. Ed in vero possiamo supporre, senza implicare contraddizione, che le forze siano proporzionali alle 2e, alle 3e potenze ec. delle velocità, ovvero alle

loro radici 2^e, 3^e ec. senza poter determinare *a priori* quale di queste e di altre funzioni matematiche egualmente possibili sia quella che realmente abbia luogo tra la forza e la velocità. Questa cognizione adunque non può ottenersi che dal paragone delle diverse supposizioni matematiche alle leggi fenomenali del moto, a fine di scovrire nell'accordo dell'ipotesi col fatto la dipendenza reale che passa tra la velocità e la forza.

Or è un dato di osservazione che i movimenti dei corpi sono indipendenti dal moto o dalla quiete del sistema al quale appartengono. Ed in vero partecipando tutti i corpi terrestri del moto diurno della terra da occidente in oriente, se i loro movimenti particolari ne dipendessero benchè in minima parte, ciò sarebbe evidentemente dichiarato dalle oscillazioni del pendolo; il quale all'opposto se ne mostra del tutto indipendente, poichè per uno stesso luogo e sotto il medesimo grado di calore oscilla sempre colla stessa celerità, qualunque angolo il suo piano verticale di oscillazione faccia colla direzione del movimento diurno. Aggiungiamo ancora che supponendo questa indipendenza l'Astronomia calcola i movimenti dei corpi celesti; ed i risultamenti del calcolo concordano pienamente con quelli dell'osservazione. Quindi rileviamo l'impossibilità di avvertire il movimento del pianeta che abitiamo, ed in conseguenza la ragione del dissenso generale che la dottrina del moto della terra incontrò nel suo primo apparire.

Ciò posto, supponiamo le forze proporzionali alle radici quadrate delle velocità, e che due corpi A e B (*fig.* 1) siano contemporaneamente e nella stessa direzione *mc* spinti da due forze che siano nel rapporto di 1 a 2. Per l'ipotesi adottata la velocità di A sarà 1, e 4 quella di B; quindi se i due corpi distano tra loro di d unità di spazio nell'origine del moto, le loro distanze dopo i tempi 1, 2, 3, ec. saranno $d+3$, $d+6$, $d+9$, ec. Ora fingiamo che il piano, su cui poggiano i due corpi, possedesse già una forza 2 nella stessa direzione *mc*, quando le forze 1 e 2 sono state comunicate ad A e B. Allora questi due corpi, che già partecipavano della forza 2 del sistema, avrebbe-

ro, dopo ricevuto l'urto, il primo la forza 3 ed il secondo la forza 4; in conseguenza la velocità di A sarebbe 9, e 16 quella di B. Donde per la stessa distanza iniziale d, le loro distanze dopo i tempi 1, 2, 3 ec. sarebbero $d+7$, $d+14$, $d+21$, ec. Dunque il moto relativo dei due corpi nelle medesime circostanze sarebbe dipendente dalla condizione di moto o di quiete del sistema, conseguenza che contraddetta dal fatto, dichiara che le forze non sono proporzionali alle radici quadrate delle velocità. A risultamenti del pari divergenti dai fenomeni noi perverremmo mettendo a pruova ogni altra ipotesi, fuorchè quella che suppone le forze proporzionali alle semplici velocità. Essa è dunque la funzione matematica della velocità che l'esperienza ci presenta quale espressione della forza; e se a questo dato empirico aggiungeremo l'altro della legge d'inerzia, avremo tutto quello che il geometra toglie dall'esperienza per comporre il grande sistema della Meccanica razionale. Nella quale prendendo le mosse dal concetto semplicissimo di un moto uniforme e rettilineo, va poi con una sintesi continua aggiungendo condizione a condizione, finchè perviene a calcolare il movimento quale si osserva nei fenomeni della Natura.

10. Un altro elemento fa parte del valore della forza, ed è la massa del mobile. In qual modo questo elemento debba entrare nella funzione della velocità, lo rileviamo immediatamente dall'idea d'inerzia; poichè se un corpo non può dare a se stesso il movimento, è necessario che a ciascuna sua molecola si comunichi quella velocità che si vuol produrre in tutta la massa; in conseguenza se si vuole una velocità v per una massa composta di m molecole, si richiederà necessariamente una forza f rappresentata dal prodotto mv; quindi l'equazione

$$f = mv.$$

Vale a dire che una forza d'impulso è rappresentata da un prodotto, di cui sono fattori i numeri ch'esprimono la massa e la velocità del mobile.

Dall'equazione precedente si deducono poi le relazioni

$$m = \frac{f}{v}, \; v = \frac{f}{m},$$

le quali determinano la massa, quando sono date la forza e la velocità, e fanno conoscere la velocità, quando sono date la forza e la massa.

Chiamando m ed m' le masse di due corpi, f ed f' le forze da cui sono animati, v e v' le velocità che ne risultano, sarà facile dedurre dalla stessa equazione $f = mv$

1.° che essendo $m = m'$, si avrà

$$f : f' = v : v',$$

vale a dire che per due masse eguali le forze sono in ragione delle velocità.

2.° che facendo $v = v'$, si avrà

$$f : f' = m : m',$$

ossia che le forze sono proporzionali alle masse, quando le velocità sono eguali.

3.° supponendo finalmente $f = f'$, avremo

$$mv = m'v', \text{ donde } m : m' = v' : v,$$

ossia che le velocità prodotte da due forze eguali sono in ragione inversa delle masse.

11. La misura delle forze continue richiede che si calcoli un terzo elemento, ed è il tempo dalla cui durata dipende la somma degl'impulsi successivi comunicati al mobile. Donde è facile dedurre che una forza continua minore di un'altra, potrà comunicare ad un corpo una velocità maggiore, quando abbia operato per un tempo proporzionatamente più grande. Per ciò l'energia di una forza continua si dovrebbe rappresentare mediante il valore dei suoi impulsi elementari, se la legge di continuità che li regge, non li sottraesse dalla possibilità di una misura diretta: purtuttavia possiamo determinarne i rapporti per mezzo di quantità finite ad essi impulsi proporzionali. Ed in vero se per

egual durata agiscono su due masse eguali due forze continue differenti, è chiaro che al termine di quella durata le due forze avranno comunicato alle masse eguali numeri d'impulsi; e per ciò le velocità acquistate dalle due masse saranno come le velocità elementari: potremo dunque dal rapporto delle prime dedurre quello delle seconde, ed in conseguenza il rapporto delle forze. E poichè l'eguaglianza della durata è condizione essenziale, si è presa per termine di paragone l'unità di tempo; quindi se una forza continua ha comunicato all'unità di massa la velocità v dopo il tempo t, dopo il tempo 1 la velocità sarebbe stata $\frac{v}{t}$. Per ciò chiamando ρ la forza acceleratrice, avremo

$$\rho = \frac{v}{t}.$$

Tutto questo suppone che gl'impulsi elementari, da cui immaginiamo composta l'azione di una forza acceleratrice, siano eguali tra loro, lo che non ha luogo in veruna delle forze continue conosciute. Ma considerando che quegl'impulsi che avvengono in un tempo infinitesimo sono da riguardarsi come eguali, così sostituiremo nell'equazione precedente le espressioni infinitesimali dv e dt ai valori finiti di v e t, ed avremo l'equazione.

$$\rho = \frac{dv}{dt},$$

la quale esprimerà il valore di una forza continua risultante da una successione d'impulsi d'intensità variabile o costante, secondochè variabile o costante sarà la funzione $\frac{dv}{dt}$.

CAPO QUARTO.

Composizione di più forze agenti sopra un punto materiale.

12. Le due forze d'impulso P e Q (*fig.* 2) agiscano nel tempo stesso sul punto materiale A, e siano di tale intensità che il mo-

bile percorrerebbe nell'unità di tempo per l'azione della sola forza P la retta Ab e per l'azione di Q la retta Ae; sotto l'azione congiunta delle due forze il punto materiale A percorrerà nella stessa durata di tempo la Ad, diagonale del parallelogrammo $Abde$.

Se poniamo che il punto A non possa moversi che lungo la Ab, e che questa retta parallelamente a se stessa scorra lungo la Ae colla velocità corrispondente alla forza Q; le condizioni del problema resteranno identiche, poichè il mobile riceverà nel tempo stesso l'azione combinata delle due forze P e Q: consideriamolo dunque sotto questa veduta. Or essendo il moto di una parte di un sistema, indipendente dalla condizione di moto o quiete del tutto; il punto A si moverà sulla Ab, come se questa fosse immobile; quindi dopo $\frac{1}{3}$ dell'unità di tempo la retta Ab starà in ss', ed il punto A avrà percorsa la retta $st = \frac{1}{3} Ab$; dopo $\frac{2}{3}$ dello stesso tempo il punto A starà nel luogo o, determinato da $vo = \frac{2}{3} Ab$; finalmente in d al finire dell'unità di tempo. Ma i triangoli Ast, Avo, ed Aed sono simili [1]; dunque i punti A, t, o e d sono in linea retta. E poichè questo risultamento è indipendente dal numero di parti eguali in cui s'immagina divisa l'unità di tempo, sarà egualmente vero per la continuità della sua durata; e per ciò sotto l'azione simultanea delle forze P e Q il mobile percorrerà la retta Ad, diagonale del parallelogrammo $Abde$ (essendo Ab, eguale e parallela a ed) costruito sulle due rette Ab ed Ae che rappresentano intensità e direzioni delle forze; e la percorrerà nello stesso tempo che avrebbe impiegato a descrivere la retta Ab per l'azione della sola forza P, e la Ae per la sola forza Q [2].

[1] I triangoli Ast, Avo, ec. sono simili, perchè hanno l'angolo $Ast = Avo =$ ec. ed i lati, che li comprendono, proporzionali, essendo $As = \frac{1}{2} Av$, $st = \frac{1}{2} vo$, ec.

[2] Questa dimostrazione del parallelogrammo delle forze (identica in quanto al principio a quella data da Newton nell'immortale libro dei *Principi matematici della Filosofia Naturale*) quando l'esposi nella prima edizione

Dunque il movimento del punto materiale A sotto l'azione congiunta delle forze P e Q, sarebbe stato egualmente prodotto da una forza che avesse avuto l'intensità e direzione rappresentate

di questo mio lavoro, fu disapprovata da parecchi geometri che valentissimi nella scienza matematica, non hanno forse ponderato con sufficiente accuratezza i canoni logici che ne debbono reggere l'applicazione. Essi me l'avrebbero facilmente concessa come un ripiego elementare, se l'uso del calcolo superiore, che io faceva nell'esposizione di altre dottrine, non li avesse in certo modo costretti a riguardarla come un regresso a metodi antiquati. A dire il vero io non assegnava alcuna ragione della preferenza data alla veduta newtoniana sulle dimostrazioni analitiche dei moderni. Ma italiano e scrivendo per Italiani, poteva io mai supporre che il buon senso, che tanto distingue i nostri geometri, avesse potuto permettere ad essi di avere in pregio le stranezze di talune *machines à calcul* oltramontane ? — Or che il fatto ha dimostrato il contrario, io esporrò francamente il mio pensiero.

La dimostrazione analitica di una legge fisica (poichè le forze non sono idee astratte) deve essere necessariamente conseguenza di un calcolo che muove da uno o più dati sperimentali che il fisico riguarda como fatti primi. Or i dati sperimentali, che debbono servire di base alla Meccanica razionale sono due, la legge d'inerzia e la proporzionalità della forza alla velocità: da questi due fatti dovrebbero partire gli analisti per dimostrare coll'algoritmo il teorema del parallelogrammo delle forze. All'opposto essi cominciano dal supporre — 1° che l'azione di due forze concorrenti in un punto deve produrre una risultante, che almeno in direzione differisca da ciascuna delle componenti: principio ipotetico, o empirico. Nel primo caso la dimostrazione manca di principio certo, nel secondo diviene una *petizione di principio*, poichè suppone ciò che deve dimostrare — 2° che la risultante deve giacere nel piano delle forze, e dividerne l'angolo per metà se esse sono eguali. Questo principio, che non può dedursi nè dall'idea d'inerzia, nè da quella di proporzionalità della forza alla velocità, il Poisson ha creduto dimostrarlo, dicendo non esservi ragione per cui la risultante debba allontanarsi dal piano delle forze in un senso piuttosto che in un altro, nè di avvicinarsi all'una piuttosto che all'altra di due forze eguali. Se sotto questo giuoco di parole non si nascondesse la legge di simmetria, che daltronde non si può applicare *a priori* alle forze perchè ne ignoriamo completamente la natura; sarei tentato a sperimentare l'esattezza di questa logica su altre quistioni di fisica, nelle quali lo spirito umano si è inoltrato più che in quella relativa alla misteriosa natura delle forze. Potrei dire, per esempio: essendo l'elettricità prodotta da una macchina elettrica, identica a quella che si svolge da una elettromotore voltiano, non vi è ragione per cui questa debba invadere la massa del filo conduttore,

dalla diagonale Ad. Questa forza equivalente nell'azione alle due forze date dicesi *risultante*, e le altre due *componenti*.

Essendo la risultante e le due componenti rappresentate dai tre lati del triangolo Adb, esse avranno tra loro le relazioni di grandezza e posizione che esistono tra queste tre linee. Quindi

— 1.° Essendo per la teorica delle paralelle l'angolo $eAd = Adb$, ed opponendosi in ogni triangolo al lato maggiore l'angolo più grande, segue che se $P = Ab$ è più grande di $Q = Ae$, sarà l'angolo $eAd > bAd$; dunque la risultante si appròssima alla componente maggiore più che alla minore. E se fosse $Q = P$, sarebbe l'angolo. $eAd = dAb$, vale a dire che la risultaute di due forze eguali divide per metà l' angolo della loro mutua inclinazione.

— 2.° Come l'angolo d'inclinazione eAc (*fig.* 3) delle due componenti diminuisce, la risultante Ab si approssima ad eguagliare la somma $Ac + cb$ delle due componenti; e per ciò quando l'angolo eAc sarà divenuto nullo, avremo $R = P + Q$: dunque la risultante di due forze agenti nel medesimo senso è eguale alla loro somma.

— 3.° Similmente la risultante si avvicinerà continuamente ad eguagliare la differenza delle due componenti, come l'angolo eAc (*fig.* 6) formato dalle loro direzioni si approssimerà a due angoli retti; e quando questa condizione sarà soddisfatta, avremo $R = P - Q$, ossia che la risultante di due forze opposte è

se la prima non occupa che la superficie. Il fisico, che avesse ragionato a questo modo anteriormente alla scoverta delle leggi relative alle correnti, avrebbe seguito a capello la logica del Poisson.

Al contrario la dimostrazione newtoniana non suppone la necessità di una risultante, ma ne deduce nel tempo stesso l'esistenza, direzione ed intensità dal principio sperimentale dell'indipendenza del moto di una porzione qualunque di materia dal moto o dalla quiete del sistema, di cui fa parte. Essa muove da un principio semplice, reale e fecondo di grandi risultamenti in tutta l'economia della macchina mondiana; e coll'evidenza della sintesi euclidea essa mena il pensiero dal principio alla conseguenza. — Queste ragioni mi hanno imposto di non dipartirmi dalla veduta newtoniana.

eguale alla loro differenza. Dunque la variazione che il cangiamento dell'angolo può recare nel valore della risultante di due forze date, si estende dalla somma alla differenza delle componenti, e quindi avrà per valore massimo

$$(P+Q)-(P-Q)=2Q,$$

ossia il doppio della forza minore.

Dall'equazione $R=P-Q$ risulta che se $P=Q$, sarà $R=o$. Il punto materiale resterà dunque nello stato di quiete, la quale prende il nome di *equilibrio* finchè dura l'azione opposta delle forze eguali: così un corpo poggiato sopra un sostegno è nello stato di equilibrio, poichè l'azione della gravità è continuamente distrutta dalla resistenza del sostegno.

13. Mediante il teorema del parallelogrammo sarà facile determinare graficamente la risultante di un numero qualunque di forze p, p', p'', p''' ec. (*fig.* 8) che agiscono sopra un punto materiale A. Costrutto il parallelogrammo sopra p e p', a queste due forze sostituiremo la loro risultante As; componendo similmente As con p'', otterremo At risultante di p, p', p''; e finalmente dalla composizione di At con p''' si avrà la risultante R delle quattro forze date.

Dalla semplice osservazione della figura sarà facile rilevare non esser necessaria la successiva costruzione dei parallelogrammi per determinare la risultante delle forze date. Dall'estremità della retta, che rappresenta la forza p, basterà condurre una retta eguale a parallela a p', e si avrà il punto s; indi st eguale e parallela a p'' ci darà il punto t; e finalmente avremo R conducendo tR eguale e parallela a p''': la retta AR che chiude il poligono, sarà la risultante richiesta. Quindi se il poligono rimanesse chiuso dall'ultima parallela, la risultante sarebbe nulla ed il sistema delle forze in equilibrio.

Se le forze agenti sopra un punto materiale fossero tre e situate in piani differenti, allora la risultante sarebbe rappresentata in intensità e direzione dalla diagonale del parallelepipedo costruito sulle tre rette che rappresentano intensità e direzione delle forze da-

te. Ed in vero sulle tre rette Ap, Ap', Ap'' (*fig. 4*) le quali rappresentano altrettante forze agenti sul punto materiale A, si costruisca il parallelepipedo AR. La diagonale Ac sarà risultante di Ap e Ap'; e poichè il quadrilatero $Ap''Rc$ è un parallelogrammo, sarà AR risultante di Ac e Ap'' ossia di Ap, Ap', Ap''.

14. La composizione delle forze continue mediante il teorema del parallelogrammo richiede che la loro azione si decomponga in una serie d'impulsi successivi, i quali come s'immagineranno più ravvicinati tra loro, così la determinazione della risultante si approssimerà di più alla realtà di essa. Sopponiamo, per esempio, l'atomo A (*fig. 11*) animato dalla forza d'impulso P e dalla gravità che lo sollecita secondo An. Su queste due direzioni si prendano Ag ed AP proporzionali agli spazî che l'atomo descriverebbe in un tempo piccolissimo per l'azione separata delle due forze; si compia il parallelogrammo e la diagonale As disegnerà il cammino fatto dal mobile nel primo elemento di tempo. Al cominciare del secondo tempo la gravità ripetendo il suo impulso costruiremo un secondo parallelogrammo, dalla cui diagonale ss' verrà disegnato il cammino dell'atomo durante il secondo tempo. Similmente $s's''$, $s''s'''$, ec., disegneranno gli spazî percorsi durante il terzo tempo, il quarto, ec. E secondochè si prenderanno più piccole parti del tempo, minori saranno i lati del contorno poligonale $Ass's''$.....; quindi se dividiamo il tempo in parti infinitesime, il contorno poligonale diverrà un arco di curva, essendo composto di lati infinitamente piccoli. E così comprendiamo in qual modo dall'azione simultanea di una forza d'impulso e di una forza continua possa derivare un movimento curvilineo.

15. Il teorema del parallelogrammo ci offre il mezzo di risolvere il problema inverso, cioè decomporre una forza data in altre di cui essa sia la risultante. Fingiamo dapprima che le componenti incognite e la risultante debbano trovarsi in un medesimo piano. In questo caso, per essere determinato il problema, la forza data non potrà essere decomposta che in due sole, le quali potranno essere definite per mezzo dei seguenti dati.

— 1° Supponiamo che la forza P disegnata in intensità e dire-

zione dalla retta A*c* (*fig.* 5) si voglia decomporre in due dirette secondo A*v* ed A*x*. Pel punto *c* conduciamo *cb* parallela ad A*v* e *ce* parallela ad A*x*; avremo il parallelogrammo A*bce*, ed A*e*, A*b* rappresenteranno la intensità delle due componenti.

— 2° Supponiamo che della forza P si conosca la componente A*b*, e si cerchi l'altra. Congiungiamo il punto *c* col punto *b*, e dai punti A e *c* si conducano A*v* parallela a *cb* e *ce* parallela ad A*b*; A*c* rappresenterà la direzione ed intensità della componente ignota.

— 3° Supponiamo in fine che delle componenti di P si conoscano soltanto le intensità. Allora coi punti A e *c* come centri e con raggi rispettivamente eguali alle intensità date si descrivano due archi di cerchio che s'intersecheranno in un punto *e*: si congiunga questo punto con A e *c*, e le direzioni delle componenti saranno A*e*, ed A*b* parallela a *ce*.

Se poi la decomposizione di una forza dovesse riguardarsi nello spazio, allora la potremmo considerare risultante di tre forze in altrettanti piani. Supponiamo, per esempio, che la forza R (*fig.* 4) si voglia decomporre in tre forze dirette secondo Ax, Ay, Az. Conduciamo pel punto R tre piani rispettivamente paralleli a zAy, zAx, yAx, i quali tagliando le rette Ax, Ay, Az determineranno le intensità Ap, Ap', Ap'' delle tre componenti.

16. Il principio della decomposizione delle forze facilita la ricerca della risultante di più forze date, ed offre il mezzo di averne l'espressione numerica, quando si hanno in numeri le intensità delle forze e le loro direzioni. Siano P, P$'$, P$''$ ec. (*fig.* 7) più forze che in un medesimo piano agiscono sul punto A. Per questo punto conduciamo due assi coordinati rettangolari (ossia due rette l'una all'altra perpendicolare) yy', xx'; e pei punti P, P$'$, P$''$ conduciamo delle paralelle a questi assi. Mediante i rettangoli che ne risultano, ciascuna delle forze verrà decomposta in due: così A*s* ed A*u* saranno le componenti di P, A*c* ed A*b* di P$'$, A*h* ed A*v* di P$''$. In conseguenza alle forze P, P$'$, P$''$ potremo sostituire due sistemi di forze, l'uno diretto secondo yy', e l'altro secondo xx'; e per ciò basterà prendere sulla yy' a contare dal punto A una retta eguale a A*u*+A*h*+A*b*, e sulla xx' una retta eguale a A*c*+A*s*—A*v*.

per avere nella diagonale del rettangolo costruito su queste due rette la direzione ed intensità della risultante richiesta.

Or supponiamo che siano date l' espressioni numeriche delle forze P, P′, P″, e degli angoli PAx, $P'Ax$, $P''Ax$, che chiamiamo α, α', α''; avremo

$$As = P\cos\alpha,\ Ac = P'\cos\alpha',\ Av = P''\cos\alpha''$$
$$Au = P\operatorname{sen}\alpha,\ Ab = P'\operatorname{sen}\alpha',\ Ah = P''\operatorname{sen}\alpha'',$$

ed in conseguenza

$$Ac + As - Av = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{ec.} = X$$
$$At + Ab + Ah = P\operatorname{sen}\alpha + P'\operatorname{sen}\alpha' + P''\operatorname{sen}\alpha'' + \text{ec.} = Y$$

Ed essendo la risultante R diagonale di un rettangolo formato dalle rette X ed Y, si avrà

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},\ \text{e}\ tang.a = \frac{X}{Y},$$

chiamando a l'angolo che la risultante farà coll'asse Ax. Queste due espressioni daranno il valore numerico dell'intensità e direzione della risultante.

Se fosse $X = o$ ed $Y = o$, sarebbe $R = o$, vale a dire il sistema in equilibrio; e $tang.\ a = \frac{o}{o}$. Questo valore indeterminato dell'angolo che la risultante farebbe coll'asse xx' dichiara che in un sistema equilibrato di forze ciascuna di esse è eguale ed opposta alla risultante delle altre.

Se poi le forze agenti sopra un punto si trovano in piani differenti, allora condurremo pel punto di concorso tre assi perpendicolari tra loro Ax, Ay, Az (*fig. 4*); ed immaginando già costruito il parallelepipedo di cui R è diagonale, avremo che Ap, Ap', Ap'' ne saranno le componenti. Operando similmente su ciascuna delle altre forze, l'intero sistema sarà ridotto a tre sole forze che ad angoli retti agiranno sul punto materiale. E chiamando P, P′, P″, ec., le forze date, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$, ec., gli angoli ch' esse formano cogli assi Ax, Ay, Az, avremo pei triangoli rettangoli

ARp, ARp', ARp'' $Ap = P\cos\alpha$, $Ap = P\cos\beta$, $Ap' = P\cos\gamma$. Quindi chiamando X, Y, Z le somme algebriche delle forze che agiscono secondo gli assi corrispondenti, sarà

$$X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{ec.}$$
$$Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \text{ec.}$$
$$Z = P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \text{ec.}$$

E per le proprietà del parallelepipedo rettangolare si avrà

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},\ \cos.a = \frac{X}{R},\ \cos.b = \frac{Y}{R},\ \cos.c = \frac{Z}{R},$$

a, b, c indicando gli angoli che la risultante farà cogli assi Ax, Ay, Az. Ed analogamente a ciò che abbiamo osservato sulle forze agenti in un piano, avremo che se $X = o$, $Y = o$, $Z = o$, sarà $R = o$ ed indeterminati ancora saranno i valori di $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$.

CAPO QUINTO.

Composizione delle forze parallele.

17. Siano P e Q (*fig. 15*) due forze parallele agenti sui punti a e b invariabilmente ligati tra loro. L'azione di queste due forze non verrà alterata, se ad esse aggiungiamo le forze eguali ed opposte am e bn, poichè queste a vicenda si distruggono. Quindi all'azione di P e Q sarà equivalente quella di ac risultante di P ed am, e di bd risultante di Q e bn. Ma se P e Q sono parallele, ac e bd abbastanza prolungate si dovranno incontrare in un punto K; e poichè ogni punto preso sulla direzione di una forza può evidentemente esser riguardato come punto di applicazione, così potremo considerare le forze ac e bd applicate nel loro punto d'incontro K, e rappresentate dalle rette $Kg = ac$, e $Kv = bd$. Decomponendo ora queste due forze secondo Ko paralella a P e Q, e hl paralella alla retta che unisce i punti a e b, avremo le quattro forze Kh, Kl, Kt, Ks: le due prime come eguali ed opposte si di-

struggono, le altre due, perchè agenti nella stessa direzione danno una risultante eguale alla loro somma. Ma $Kt = P$, $Ks = Q$; dunque due forze paralelle dirette nel medesimo senso, hanno una risultante ad esse paralella ed eguale alla loro somma, cioè $R = P + Q$.

Perchè questa risultante sia interamente definita, è d'uopo conoscere un punto della sua direzione: cercheremo, per esempio, quello in cui essa taglia la retta che unisce i punti di applicazione delle due componenti. Or abbiamo i triangoli gKt simile ad aKo, ed sKv simile a bKo, i quali ci danno le seguenti proporzioni.

$$gt : P = ao : oK$$
$$sv : Q = bo : oK,$$

dalle quali si ottengono i prodotti eguali

$$gt.oK = P.ao \qquad sv.oK = Q.bo;$$

ed essendo $gt = sv$, sarà

$$P.ao = Q.bo;$$

donde

$$P : Q = bo : ao;$$

dunque la risultante di due forze paralelle dirette nel medesimo senso, è eguale alla loro somma, paralella alla loro direzione, e divide la retta che unisce i loro punti di applicazione in parti reciprocamente proporzionali.

Dalla proporzione precedente è ancora facile dedurre le relazioni

$$P + Q : P : Q = bo + ao : bo : ao$$

ossia

$$R : P : Q = ab : bo : ao,$$

vale a dire che ciascuna delle tre forze (le due componenti P e Q, e la loro risultante R) è direttamente proporzionale alla distanza che separa i punti di applicazione delle altre due.

18. Se poi le due forze paralelle P e Q (*fig. 12*) fossero opposte

e diseguali, allora dopo aver aggiunto le due forze eguali ed opposte *ac* e *bc*, si compiano i parallelogrammi *Qc*, *Pc*; e le risultanti *ag* e *bl* si potranno sostituire alle forze P e Q. Ma pei teoremi relativi alle rette parallele è facile dimostrare che *ag* e *bl* a sufficienza prolungate si dovranno incontrare in un punto *t*: dunque prenderemo questo come punto di applicazione di $ts = ag$, e $tn = bl$. Indi decomporremo le due forze *ts* e *tn* secondo le rette *ho* parallela alle forze, e *km* parallela alla retta che ne unisce i punti di applicazione. Avremo così le componenti *tk*, *tm*, *th*, *te*, dalle quali eliminando le due prime perchè a vicenda si distruggono, resteranno *th* e *te* che diseguali ed opposte danno una risultante eguale alla loro differenza: avremo dunque $R = P - Q$.

Per fissare un punto della sua direzione (giacchè essa è parallela alle forze date) cercheremo quello in cui essa taglia il prolungamento di *ab*. Se questo punto *o* fosse noto, poichè la risultante vi agirebbe nella direzione *oh*, noi vi applicheremmo una forza eguale $-R$ nell'opposta direzione *oz*, ed allora il sistema starebbe in equilibrio. Ma le due forze parallele Q e $-R$ agiscono nel medesimo senso, avremo dunque una risultante la quale per controbilanciare l'azione di P, dovrà passare pel punto *b*; ed in conseguenza per determinare il punto *o* (facendo $ab = a$, $bo = x$) avremo la proporzione

$$a : x = R : Q,$$

donde

$$x = \frac{Q.a}{R} = \frac{Q.a}{P - Q}.$$

Dunque la risultante di due forze parallele opposte tanto più si allontana da esse quanto minore è la loro differenza; e se fosse $P = Q$, sarebbe $R = o$, $x = \infty$. Per intendere questo risultamento della formola è d'uopo osservare che nell'ipotesi di $P = Q$ le due rette *bl* ed *ag* riescono parallele; e per ciò non essendovi punto d'incontro, non vi può essere risultante. Questi speciali sistemi di forze parallele hanno ricevuto il nome di *coppie*, di cui il Poinsot ha dato una luminosa teorica nei suoi *Elementi di Statica*.

19. Mediante gli esposti principî è facile determinare graficamente la risultante di qualsivoglia numero di forze paralelle. Siano P, P', P'', ec., (*fig. 14*) le forze date, *a b d* i loro punti di applicazione fermati in un sistema invariabile. Dividendo la retta *ab* in due parti inversamente proporzionali a P e P', avremo il punto *c* di applicazione della loro risultante P + P': componendo similmente P'' con P + P', troveremo il punto di applicazione *g* di una forza eguale a P + P' + P''; e continuando questo modo di costruzione, perverremo in fine a determinare la risultante dell'intero sistema, ed il suo punto di applicazione.

Se poi le forze paralelle non avessero tutte la stessa direzione, allora cominceremmo dal determinare la risultante di ciascuno dei due sistemi in cui esse si possono dividere: se le due risultanti parziali riusciranno eguali, avremo una coppia, ed in conseguenza il sistema sarà irreducibile ad unica risultante; nel caso contrario avremo da costruire la risultante di due forze paralelle, opposte e diseguali.

Il metodo col quale abbiamo determinato la risultante di più forze paralelle, ci dichiara che il suo punto di applicazione è indipendente dalla speciale direzione delle forze. Quindi se le forze P, P', P'' girassero intorno ai loro punti di applicazione, e conservandosi tuttavia paralelle prendessero le direzioni *p*, *p'*, *p''*, la loro risultante non lascerebbe di passare pel punto *g*. Laonde se in un sistema di forze paralelle restano costanti le intensità delle forze e le posizioni dei punti di applicazione, vi sarà ancora un punto di posizione costante pel quale passerà la risultante del sistema, comunque le componenti girassero intorno ai loro punti di applicazione. Questo punto si denomina *centro delle forze paralelle.*

20. Nelle diverse applicazioni di questo teorema è sovente utile ottenere una definizione numerica del centro di più forze paralelle, quando in numeri sono date le loro intensità e le posizioni dei punti sui quali agiscono. Riferite a tal uopo le posizioni di questi punti a tre piani coordinati rettangolari zAy, zAx, yAx (*fig. 16*), incominciamo dal considerare due sole forze P e P' applicate ai

punti a e b, dati per mezzo delle coordinate $x\,y\,z$ pel punto a, $x'\,y'\,z'$ pel punto b. Sia c il centro delle due forze parallele, e del quale cerchiamo le coordinate.

Dai punti a, c e b abbassando delle perpendicolari sul piano $y\mathrm{A}x$, e dai piedi di esse d, e, g conducendo delle parallele all'asse Ay, saranno ad, ds, As le coordinate del punto a, ce en An quelle di c, bg gt At quelle di b. Or dovendo c dividere la retta ab, che unisce i punti di applicazione delle forze P e P′ in parti reciprocamente proporzionali alle intensità di esse, avremo

$$\mathrm{P} : \mathrm{P}' = bc : ac;$$

ma per un noto teorema di geometria abbiamo

$$bc : ac = eg : de = nt : ns,$$

ed inoltre

$$nt = \mathrm{A}t - \mathrm{A}n = x' - \mathrm{A}n$$

e

$$ns = \mathrm{A}n - \mathrm{A}s = \mathrm{A}n - x;$$

dunque

$$\mathrm{P} : \mathrm{P}' = x' - \mathrm{A}n : \mathrm{A}n - x.$$

Dalla quale proporzione si ottiene

$$\mathrm{A}n = \frac{\mathrm{P}x + \mathrm{P}'x'}{\mathrm{P} + \mathrm{P}'}.$$

Operando similmente sugli altri due piani coordinati avremo

$$en = \frac{\mathrm{P}y + \mathrm{P}'y'}{\mathrm{P} + \mathrm{P}'}$$

$$ce = \frac{\mathrm{P}z + \mathrm{P}'z'}{\mathrm{P} + \mathrm{P}'}.$$

Essendo facile estendere questo calcolo ad un numero qualun-

que di forze paralelle P, P', P'', ec., saranno le coordinate X, Y, Z del loro centro espresse dalle equazioni

$$X = \frac{Px + P'x' + P''x'' + \ldots}{P + P' + P'' + \ldots}$$
$$Y = \frac{Py + P'y' + P''y'' + \ldots}{P + P' + P''}$$
$$Z = \frac{Pz + P'z' + P''z'' + \ldots}{P + P' + P''}.$$

Finchè tutte le forze paralelle componenti un sistema, sono dirette in un medesimo senso, il polinomio $P + P' + P'' + \ldots$ che forma il denominatore comune di queste tre funzioni frazionarie, sarà sempre un numero positivo; ed i numeratori potranno essere positivi, negativi o nulli, secondo i valori assoluti delle forze ed i valori assoluti e relativi delle coordinate dei punti di applicazione. I risultamenti che si avranno dalle formole in queste diverse ipotesi saranno facilmente interpetrati. Ma non avverrà altrettanto, allorchè le forze essendo dirette in senso opposto, si abbia $P + P' + P'' + \ldots = o$; poichè in questo caso i valori di X, Y, Z saranno indeterminati o infiniti, secondochè i numeratori saranno nulli o avranno un valore.

Supponiamo in primo luogo che i numeratori ed il denominatore comune siano eguali a zero. In questo caso le coordinate del centro saranno

$$X = \frac{o}{o},\ Y = \frac{o}{o},\ Z = \frac{o}{o};$$

esse dunque saranno indeterminate; e chiamando $P, P', \ldots$ le forze che agiscono in un senso, e $P_{\prime}, P'_{\prime}, \ldots$ le forze che agiscono in senso opposto, le funzioni frazionarie che rappresentano i valori delle coordinate, avranno necessariamente le seguenti forme.

$$X = \frac{Px + P'x' + \ldots - P_{\prime}x_{\prime} - P'_{\prime}x'_{\prime} - \ldots}{P + P' + \ldots - P_{\prime} - P'_{\prime} - \ldots}$$
$$Y = \frac{Py + P'y' + \ldots - P_{\prime}y_{\prime} - P'_{\prime}y'_{\prime} - \ldots}{P + P' + \ldots - P_{\prime} - P'_{\prime} - \ldots}$$
$$Z = \frac{Pz + P'z' + \ldots - P_{\prime}z_{\prime} - P'_{\prime}z'_{\prime} - \ldots}{P + P' + \ldots - P_{\prime} - P'_{\prime} - \ldots}$$

E poichè i polinomi, componenti i termini delle funzioni frazionarie, si suppongono eguali a zero, avremo

$$P+P'+\ldots=P_{,}+P'_{,}+\ldots$$
$$Px+P'x'+\ldots=P_{,}x_{,}+P'_{,}x'_{,}+\ldots$$
$$Py+P'y'+\ldots=P_{,}y_{,}+P'_{,}y'_{,}+\ldots$$
$$Pz+P'z'+\ldots=P_{,}z_{,}+P'_{,}z'_{,}+\ldots$$

ed in conseguenza

$$\frac{Px+P'x'+\ldots}{P+P'+\ldots}=\frac{P_{,}x_{,}+P'_{,}x'_{,}+\ldots}{P_{,}+P'_{,}+\ldots}$$
$$\frac{Py+P'y'+\ldots}{P+P'+\ldots}=\frac{P_{,}y_{,}+P'_{,}y'_{,}+\ldots}{P_{,}+P'_{,}+\ldots}$$
$$\frac{Pz+P'z'+\ldots}{P+P'+\ldots}=\frac{P_{,}z_{,}+P'_{,}z'_{,}+\ldots}{P_{,}+P'_{,}+\ldots}.$$

Ma $\frac{Px+P'x'+\ldots}{P+P'+\ldots}$ esprime la x del centro delle P, e $\frac{P_{,}x_{,}+P'_{,}x'_{,}+\ldots}{P_{,}+P'_{,}+\ldots}$ esprime la x del centro delle $P_{,}$; dunque questi due centri hanno la medesima x: similmente si trova che hanno la stessa y e la stessa z. Or due punti non possono avere le stesse coordinate senza confondersi in un solo; dunque il centro delle P e quello delle $P_{,}$ occupano il medesimo luogo; ed in conseguenza le due risultanti parziali essendo eguali ed agendo sul medesimo punto in opposte direzioni, si faranno necessariamente equilibrio. E poichè agiscono lungo una stessa retta, ogni punto della loro comune direzione può essere riguardato come centro dell'intero sistema; e le coordinate, che debbono dichiarare la sua posizione, dovranno presentarsi necessariamente sotto il segno d'indeterminazione $\frac{o}{o}$, poichè debbono convenire ad un'infinità di punti.

Se poi nessuno dei numeratori, o soltanto taluno di essi, non si riducesse eguale a zero, allora sarebbe facile dedurre dalle formole precedenti che il centro delle P e quello delle $P_{,}$ non occuperebbero lo stesso luogo; e quindi il sistema si ridurrebbe ad una

coppia. Questa impossibilità di ridurre il sistema ad unica risultante è dichiarata dalla forma $\frac{m}{o}$ (indice di un quoziente impossibile) che in questa ipotesi prenderebbero le funzioni destinate a determinare le coordinate del centro.

CAPO SESTO.

Momenti delle forze.

21. Sia *ab* (*fig. 10*) una retta inflessibile, mobile intorno al punto *c*; ed agli estremi di essa siano perpendicolarmente applicate due forze paralelle P e Q, tali che si abbia la proporzione

$$P : Q = bc : ac.$$

È chiaro che la risultante passerà pel punto *c*, e la retta non prenderà movimento di rotazione intorno a questo punto. Osserviamo ancora che le tendenze a rotare intorno al punto fisso *c* sono tali, che prevalendo l'azione della forza P la retta roterebbe da destra a sinistra, e viceversa da sinistra a destra se prevalesse l'azione di Q. Or senz'alterare l'intensità di quest'ultima forza, supponiamola trasportata parallelamente a se stessa nel punto *b*, medio di *bc*. È evidente che la risultante non passerà più pel punto fisso *c*, ma per un punto situato tra *a* e *c*; e la retta roterà da destra a sinistra, vale a dire che l'azione di Q non potrà più equilibrare quella di P. Dunque l'azione di una forza nel far rotare una retta intorno ad un punto fisso, è funzione non solo dell'intensità della forza, ma ancora della distanza che separa il punto fisso dalla sua direzione.

Per determinare la natura di questa funzione, cerchiamo il valore che dovrebbe avere Q, affinchè applicata in b' controbilanciasse l'azione di P. Facendo $bc = q$, $ac = p$, il valore richiesto di Q ci sarà dato dalla proporzione

$$P : x = \tfrac{1}{2} q : p,$$

donde

$$x = \frac{2Pp}{q};$$

ma quando Q era applicata al punto b, il suo valore era $\frac{Pp}{q}$, metà del valore di x. Dunque per trasportare il punto di applicazione b alla metà di bc e conservare l'equilibrio, è stato necessario duplicare l'intensità di Q. Dunque una forza d'intensità costante avrà un potere di rotazione doppio, triplo ec., secondochè verrà applicata ad una distanza doppia, tripla, ec. Quindi il potere di rotazione di una forza verrà espresso dal prodotto dell'intensità della forza per la distanza della sua direzione dall'asse di rotazione. Questo prodotto dicesi *momento di una forza*.

22. Se poi la forza P (*fig. 9*) che tende a far girare la retta bc intorno al punto fisso c, avesse una direzione obbliqua alla stessa retta; allora scomporremmo la forza data in due, bp perpendicolare a bc, e bs nel senso della retta. È evidente che quest'ultima sarebbe distrutta dal punto fisso c, e che la sola bp produrrebbe la rotazione. Ed essendo $bp = P\cos\alpha$, il momento della forza P sarà $P\cos\alpha . bc$. Conducendo pel punto c la cm perpendicolare alla direzione della forza P, avremo l'angolo α' complemento di α; in conseguenza $\cos.\alpha = \text{sen}.\alpha'$, ed il momento della forza P diverrà $P.bc.\text{sen}\alpha'$. Ma $bc.\text{sen}\alpha' = cm$, distanza del punto fisso dalla direzione della forza; dunque il momento di una forza, qualunque sia la sua direzione, sarà sempre espresso dal prodotto della sua intensità per la distanza della sua direzione dal punto fisso.

23. Se più forze spingono una retta a rotare intorno ad un punto, il momento della loro risultante sarà eguale alla somma o alla differenza dei momenti delle componenti, secondochè queste tenderanno a produrre rotazioni cospiranti od opposte.

Incominciamo dal supporre che le componenti agiscono nel medesimo senso; e siano P e P' due forze applicate alla retta ac (*fig. 21*) mobile intorno al punto a. Queste forze le supponiamo in direzioni perpendicolari alla retta, perchè se fossero ad esse obblique, l'azione non sarebbe prodotta che dalle loro componenti perpendicolari. Quindi avremo

$$R = P + P', \quad P : P' = ce : be.$$

Facciamo $ab = p$, $ae = r$, $ac = p'$; la proporzione precedente diverrà

$$P : P' = r - p' : p - r$$

dalla quale si ottiene

$$(P + P')\, r = Pp + P'p'.$$

Supponendo una terza forza P'' di cui p'' sia la distanza del punto fisso, ed r' la distanza della risultante $P + P' + P''$ dallo stesso punto, avremo

$$(P + P' + P'')\, r' = (P + P')\, r + P''p'' = Pp + P'p' + P''p''.$$

Ed in generale chiamando R la risultante di un numero qualunque di forze che tutte tendono a far rotare nel medesimo senso, ed r la sua distanza dall'asse di rotazione, avremo

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots.$$

Supponiamo ora che le forze P e P' agendo sulla retta *bc* (*fig.* 15 mobile intorno al punto *a*, tendano a produrre opposte rotazioni. Supponendo *e* il punto per cui passa la loro risultante, avremo la proporzione

$$P : P' = ce : be;$$

e conservando le stesse notazioni precedenti avremo
$ce = p' + r$, $bc = p - r$, quindi

$$P : P' = p' + r : p - r,$$

donde

$$(P + P')\, r = Pp - P'p'$$

ossia

$$Rr = Pp - P'p'$$

Dunque il momento della risultante sarà eguale alla differenza dei momenti delle componenti, se queste tendono a far girare in opposte direzioni.

È però da osservarsi che nel caso di una coppia l'equazione dei momenti diverrebbe .

$$o = P\, (p \pm p'),$$

e quindi assurda. Ma è facile comprendere che una coppia darà un momento eguale alla somma o alla differenza dei momenti delle componenti, secondochè il punto fisso starà in mezzo ai loro punti di applicazione, o fuori di essi. Ed in vero se il punto fisso sia *c* (*fig.* 22) situato tra i punti di applicazione *a* e *b*, le due forze P tenderanno a girare la retta *ab* in un medesimo senso, e quindi i momenti P.*ac* e P.*bc* si dovranno addizionare tra loro: se poi il punto di applicazione fosse *c'*, i momenti P.*ac'* e P.*bc'* sarebbero opposti e la retta *bc'* tenderebbe di rotare colla differenza di questi momenti.

LIBRO SECONDO.

GRAVITÀ.

24. Dopo aver esposto le principali leggi delle forze, vale a dire delle cagioni dei fenomeni fisici considerati sotto il carattere comune di movimento, dobbiamo studiarne gli effetti speciali nelle diverse classi di fenomeni che formano l'obbietto della scienza fisica. In quest'applicazione dei principî generali la severità logica richiederebbe che le diverse teoriche della scienza venissero esposte con tal ordine da non lasciare giammai interrotta la progressione dal noto all'ignoto; e sotto questa veduta il metodo storico, depurato da regressi ed aberrazioni cui non di rado lo spirito umano si è lasciato andare, sarebbe l'unico possibile. Ma poichè ogni fenomeno suol essere effetto complesso di più cagioni, così non si è potuto spingere innanzi una branca della Fisica senza sorreggerla di ritrovati appartenenti ad altra branca: vediamo, per esempio, un teorema idrostatico sull'equilibrio dei liquidi nei vasi comunicanti somministrare un metodo di misura della dilatazione assoluta di questi corpi per effetto di accresciuto calore; e viceversa da un fatto tolto dalla classe dei fenomeni termici dipendere la ragione idrodinamica delle correnti che si producono in una massa liquida, che abbia una temperatura differente da quella del mezzo ambiente. Volendo dunque soddisfare al canone logico, « *ea praecedant quae aliis lumen praeferunt* » bisognerebbe coordinare l'esposizione dei fenomeni me-

diante una sintesi artificiale che non lascerebbe scorgere quella fisionomia, per così dire, di famiglia che caratterizza la serie degli effetti collegati ad una medesima cagione, e che costituisce l'elemento primo della teorica positiva. E poichè la scienza sta appunto nella cognizione di questa naturale dipendenza dei fatti, così è d'uopo che la ragione della sintesi espositiva ceda ad un obbietto ideologico più rilevante.

Dietro queste considerazioni sarebbe indifferente dar principio all'esposizione delle dottrine fisiche da una teorica piuttosto che da un'altra. Intanto sogliono gli autori cominciare da quella della gravità, e la ragione di questa consuetudine sta tutta nella storia della scienza. La Fisica degli antichi non sapeva vedere al di là dei fenomeni dell'urto, ed ogni spiegazione scientifica da essi immaginata, conteneva sempre come elemento essenziale l'idea di un impulso meccanico; idea che tacitamente introdotta nella Fisica dei moderni ha fatto riguardare l'ipotesi degl'imponderabili come una necessità logica. Da ciò s'intende come la Fisica e la Meccanica abbiano avuta un'origine comune, e come il progresso dell'una sia stato ora cagione ed ora effetto del progresso dell'altra: così se la Meccanica razionale acquistava le leggi dei movimenti accelerati mercè le scoverte di Galileo sulla discesa dei gravi, guidata poi dal genio di Newton scovriva nella mutua tendenza degli atomi materiali la ragione prima dei movimenti planetari. E per questa felice combinazione del calcolo coll'esperienza, e per la moltitudine dei fenomeni associati ad un solo principio, la teorica della gravità sotto il titolo di *Fisica generale* divenne la parte più rilevante della scienza, ed ottenne il primo luogo nell'ordine dell'esposizione.

Ora non vi ha più distinzione tra Fisica generale e particolare se non per coloro che ignorano le attuali condizioni della scienza: le leggi dell'elettricità, della luce, del calore, egualmente che quelle della gravità, sono indipendenti dalla speciale natura dei corpi, e quindi appartengono indistintamente ad ogni aggregato materiale. Nè l'applicazione del calcolo è restata esclusivamente pei fenomeni della gravità: Fourier, Am-

père, Fresnel, Ohm, Gauss hanno coordinato in sistemi matematici i fenomeni del calore, dell'elettricità, della luce e del magnetismo. Contuttociò la branca di Fisica, creata da Newton, gode tuttavia di un primato logico, a cui nessun'altra può aspirare: essa è un modello di teorica positiva, vale a dire di un sistema scientifico, nel quale senza l'aiuto di verun principio ipotetico, ma per la sola opera del calcolo poggiato sopra due dati di osservazione, il fisico non solo comprende sotto una sola veduta un'enorme quantità di fatti in apparenza indipendenti, ma sovente per la realtà del principio egli può andare innanzi all'osservazione, come attestano parecchie scoverte del mondo planetario. Per questa ragione puramente didattica noi abbiamo conservato alla teorica della gravità il primo luogo nell'esposizione delle dottrine fisiche.

CAPO PRIMO.

Discesa verticale dei gravi nello spazio vôto.

25. Ogni corpo allontanato dal suolo e poi abbandonato a se stesso, ricade con movimento rettilineo ed accelerato. Per assicurarsi della prima parte di questa proposizione, si faccia passare il filo di un piombino per la gola di una carrucola *a* (*fig.* 23) fermata alla base di una finestra. E dopochè sia cessata ogni oscillazione nel filo e che il piombino sia quasi a contatto del suolo, si segni il punto corrispondente *b*, ed ivi si ponga un piccolo disco di argilla inumidita o di altro corpo molle. Indi tirato in su il piombino, si lasci sospeso in *b'* a piccola distanza dalla girella; e quando esso sia in perfetta quiete, si avvicini la fiamma di una candela alla porzione *ab'* del filo, affinchè questo bruciando si rompa senza verun urto laterale. Dall'impressione che il piombino farà sul corpo molle si conoscerà ch'esso ha colpito precisamente il punto cui corrispondeva, quando era tenuto dal filo; ed in conseguenza ha percorso nella sua caduta la linea retta che segnava il filo di sospensione [1].

[1] Purchè l'altezza non sia troppo grande, poichè in questo caso il corpo

Affinchè l'esperimento riesca, è d'uopo che l'aria sia a sufficienza calma, e che il corpo fisicamente omogeneo abbia una figura simmetrica rispetto al filo cui è sospeso. Poichè se l'aria fosse agitata dal vento, questo spingerebbe il corpo in una direzione diversa da quella della gravità, come avviene alle gocce che cadono durante una pioggia tempestosa. Per comprendere poi l'influenza dell'omogeneità fisica del corpo congiunta alla simmetria della figura relativamente al filo di sospensione, basta osservare la caduta di un foglio di carta anche nell'aria perfettamente calma: per la varia resistenza che incontra nelle sue facce lo vediamo errare in diversi sensi prima di giungere a toccare il suolo.

Questa retta, secondo la quale la gravità sollecita i corpi verso la superficie terrestre, ha una rimarchevole relazione di sito colla superficie delle acque tranquille esistenti nel luogo di osservazione. Per determinare questa relazione come semplice fenomeno (poichè la sua cagione la cercheremo in seguito) è d'uopo premettere l' enunciato della seguente legge ottica. » Quando

devierebbe alquanto verso levante dal piede della verticale menata pel punto di partenza. Guglielmini ha ottenuto un deviamento di 8 linee per un corpo che cadeva dall'altezza di 240 piedi; e per un altezza di 260 piedi Benzemberg ha trovato 5 linee di deviamento. Se questi risultamenti non possono, per la loro opposizione, dare una misura del fenomeno, ne provano almeno l'esistenza.

La cagione di questo fatto sta nella celerità tangenziale che il moto diurno della terra comunica a tutti i corpi che ne fanno parte. Quelli che più distano dalla sua superficie, descrivendo in 24 ore un cerchio più grande, acquisteranno una maggiore celerità di traslazione, quindi nella loro caduta si troveranno più celeri verso levante (poichè il moto diurno della terra procede da ovest ad est) del punto della superficie terrestre posto sulla stessa verticale, ed in conseguenza dovranno superarlo. Chiamando Δ questo deviamento, h l'altezza della caduta, n l' angolo di rotazione della terra durante il tempo della discesa, θ il complemento della latitudine del luogo, e g lo spazio percorso da un grave nel primo minuto secondo della sua caduta, Laplace ha trovato per determinare Δ la relazione

$$\Delta = \frac{2}{3} nh . \operatorname{sen} \theta \sqrt{\frac{h}{g}} .$$

un pennello luminoso incontra la superficie di uno specchio, si riflette in modo che i due raggi incidente e riflesso sono nel medesimo piano che passa per la normale alla superficie dello specchio condotta pel punto d' incidenza, e formano con questa retta angoli eguali ». In forza di questa legge è facile determinare graficamente il sito e la figura dell' immagine, quando le stesse cose siano date rispetto all' oggetto. Ed in vero sia AB (*fig.* 18) uno specchio piano, ed *m* un punto luminoso, donde partono i raggi *ms*, *mn*, *mt*. Si conduca dal punto *m* la perpendicolare *mz*, e si prolunghi in *m'* finchè sia *zm'*=*zm*. Si congiunga *m'* con *s*,*n*,*t* e si prolunghino queste rette : *sc*,*nv*,*th* saranno le direzioni dei raggi riflessi ed *m'* sarà il luogo dell'immagine, poichè l'occhio dell'osservatore riceverà i raggi del pennello riflesso *csth*, come se ne venissero dal punto *m'*. Che poi i raggi riflessi siano diretti come vengono descritti dalla costruzione precedente, è facile rilevarlo dai più semplici teoremi di Geometria; poichè essendo l'angolo *msz*=*zsm'*, e *zsm'*=*Bsc*, sarà *msz*=*Bsc*, e quindi eguali ancora i loro complementi determinati dalla normale *Ks*.

Or se in vece di un punto luminoso, ne consideriamo una serie in linea retta, come *ab* (*fig* 24); è chiaro dalla costruzione precedente che la retta *ab* e la sua immagine *a'b'* debbono essere simmetricamente situate rispetto al piano dello specchio CD; e quindi se *ab*, restando tuttavia in un piano normale allo specchio, giri intorno al punto *a* fino a divenire *bk* prolungamento della perpendicolare *bs*, l'immagine *a'b'* diverrà *b'k'* prolungamento di *b's*. In conseguenza quando un filo rettilineo sia perpendicolare al piano di uno specchio, l'immagine e l'oggetto formeranno una sola linea retta.

Ciò posto, sopra una vasca piena di mercurio (la cui superficie, com'è noto, gode della proprietà specolare ad un alto grado) sospendiamo un filo a piombo *ab* (*fig.* 17) in modo che il piombino *b* sia pressochè a contatto del mercurio. Vedremo allora che, comunque staremo situati rispetto alla vasca, il filo e la sua immagine formeranno una sola linea retta. Sospendiamo del pari un

secondo filo *mn*, e poniamo l'occhio in un punto *o* tale da presentarci i due fili in uno stesso piano visuale; potremo così vedere che il filo *mn* cuopre esattamente non solo il filo *ab*, ma ancora la sua immagine *b'a'* ed avremo confermato il risultamento della prima osservazione sull'unica direzione che unisce il filo a piombo alla sua immagine. Dunque la direzione della gravità, identica a quella di un filo tratto da un peso, è perpendicolare alla superficie di livello di un liquido tranquillo esistente nel luogo dell'osservazione.

Or se la direzione della gravità dev'essere ovunque normale alla superficie di livello delle acque stagnanti, essa dovrà necessariamente variare da un luogo all'altro, secondochè varierà la direzione del piano tangente a quella superficie. Gli antichi, che supponevano la terra essere un' immenso piano ondulato dalle catene dei monti, dovevano necessariamente riguardare la gravità come una tendenza illimitata a scendere giù. Ma quando i viaggi convinsero della rotondità della terra anche coloro che deridevano l' esistenza delle regioni antipode, le idee dell' alto e del basso si trasformarono da assolute in relative, e quell' immaginata tendenza della gravità a far sempre discendere vestì nel concetto del fisico la forma di attrazione centrale. Or da un lato noi conosciamo quale relazione di sito abbia la direzione della gravità colla superficie delle acque tranquille, e da un altro lato gli studî geomorfici ci assicurano della quasi sfericità [1]

[1] La terra è un solido sferiforme depresso ai poli e sollevato all'equatore. Ma la depressione polare non è che $\frac{1}{300}$ circa del diametro equatoriale; dimodochè sopra un globo artificiale di 3 palmi di diametro, la depressione polare sarebbe di $\frac{1}{100}$ di palmo, e quindi insensibile. Più piccola ancora è l'alterazione di figura provveniente dalle grandi catene di montagne: comparando l'elevazione del *Dhawalagiri* (uno dei punti più elevati del Globo) sul livello del mare al valore medio del raggio terrestre, si ottiene il rapporto 0,0013; quindi sul globo artificiale di 3 palmi di diametro il Dhawalagiri avrebbe l'altezza di circa 2 millesimi di palmo.

della terra e quindi della superficie del mare; in conseguenza la direzione della gravità normale alla superficie dell'acqua in riposo, lo sarà benanche alla sfera terrestre, e perciò andrà secondo il raggio della terra condotto pel punto di osservazione. Purtuttavia questa indentità di direzione tra il raggio di curvatura e la direzione del filo a piombo non è di rigore matematico; ed in appresso vedremo per qual ragione lo stato geomorfico e la composizione gealogica di una regione possono rendere quelle due linee divergenti per uno stesso punto della superficie terrestre.

Or dall'essere la gravità diretta secondo la normale alla superficie della terra pel punto di osservazione, sègue che due fili a piombo faranno tra loro un angolo misurato dall'arco di cerchio massimo compreso tra i due punti, nei quali la superficie della terra sarebbe incontrata dal prolungamento dei fili. E poichè è noto che il minuto medio del grado terrestre, vale a dire il miglio geografico, è lungo 7000 palmi; due fili a piombo dovranno essere lontani $\frac{7000}{60}=116$ palmi circa, perchè le loro direzioni facciano l'angolo di 1″; quindi per distanze molto minori possiamo considerare le direzioni della gravità come fisicamente parallele.

26. Ora resta a dimostrare la seconda parte della proposizione enunciata nel principio di questo capo, vale a dire che la discesa dei gravi si compie con movimento accelerato. E se nel dichiarare l'andamento rettilineo della loro caduta abbiamo fatto astrazione dalla resistenza dell'aria, potevamo ciò fare perchè nell'ipotesi di un'aria calma la sua resistenza non dà componente orizzontale e quindi non può deviare il grave dal suo cammino rettilineo. Non è lo stesso dell'acceleramento del moto, poichè la resistenza dell'aria, distruggendo parte della velocità impressa dalla gravità, altera la relazione che senza di essa avrebbe avuto luogo tra lo spazio ed il tempo, e quindi nasconde la vera legge dell'acceleramento. Or l'esperienza dichiara che la resistenza dell'aria è tanto più più piccola, per quanto è minore la celerità del mobile che l'attraversa: così se camminando in un'aria perfettamente calma non avvertiamo l'ostacolo ch'essa oppone

al movimento del nostro corpo, ci sembra viceversa d'incontrare un vento impetuoso, quando siamo trasportati dalla rapida corsa di un cavallo. Dunque senz'alterare la ragione di grandezza nella successione degli spazî percorsi in una serie di tempi eguali, conviene rallentare di molto la celerità con cui un grave discende, perchè si possa negligere la resistenza dell'aria; e questa diminuzione di celerità ci recherà inoltre il vantaggio di poter investigare la legge richiesta per mezzo di un'immediata osservaziozione, vantaggio di cui saremmo privi ancorchè potessimo sperimentare in uno spazio vòto, stantechè la somma celerità della caduta renderebbe impossibile l'esplorazione diretta.

A questo doppio scopo soddisfa la *macchina di Atwood*. Il suo pezzo principale è una girella (*fig.* 25) per la cui gola passa un filo di seta che nei suoi estremi porta due pesi eguali m, n. Poichè i punti, ove il filo si stacca dal corpo della girella sono gli estremi del suo asse orizzontale, i momenti di rotazione (n° 21) dei due pesi m, n saranno eguali ed opposti, e perciò terranno il sistema in equilibrio. Ma se ad una delle masse eguali aggiungiamo un peso addizionale m', il sistema comincerà a discendere dalla parte di questo peso, ma con una velocità minore di quella che m' avrebbe acquistato se fosse stato libero nella caduta. Chiamiamo g la velocità che m' acquisterebbe scendendo per $1''$ nel vòto; coi medesimi dati la massa m' avrebbe la velocità $\frac{gm'}{2m+m'}$ (n° 10). Quindi possiamo prendere m' abbastanza piccolo, perchè ne risulti una discesa così lenta da rendere facile l'esplorazione diretta del fenomeno e pressochè nulla la resistenza dell'aria; e questa diminuzione di celerità si ottiene senz' alterare la legge del movimento, poichè l'azione della gravità non cessa di essere continua, ma soltanto viene indebolita col diffondersi in una massa più grande.

Avvi però in questo modo di sperimentare una cagione di errore, la quale se non venisse abbastanza attenuata potrebbe far dedurre dall'esperimento una legge tutt'altra che reale. Questa cagione di errore risiede nell'attrito che durante la rotazione l'as-

se della girella incontra sui pezzi di sostegno. E per dichiararne l'influenza supponiamo che la ragione degli spazi successivi percorsi in tempi eguali dal sistema delle due masse m, n per l'azione del peso addizionale m', sia rappresentata dalla serie

$$a,\ 3a,\ 5a,\ 7a,\ .\ .\ .\ .\ .\ ;$$

la quale serie per la resistenza dell' attrito divenga nell' esperimento

$$a - b,\ 3a - b',\ 5a - b'',\ 7a - b''',\ .\ .\ .\ .\ .\ ;$$

è facile comprendere che questi numeri per avere tra loro le stesse ragioni dei primi dovranno essere soddisfatte l'equazioni

$$b' = 3b,\ b'' = 5b,\ b''' = 7b,\ \text{ec.}$$

le quali, per quanto è noto circa le leggi dell'attrito, non possono aver luogo. Quindi se nell'esperimento suindicato l'attrito non si rendesse pressocchè insensibile, dal suo risultamento non si potrebbe dedurre che una falsa legge. Per attenuare questa resistenza Atwood ha fatto poggiare l'asse della girella sopra quattro ruote(come viene rappresentato dalla *fig. 19* mediante due projezioni verticali); così il moto dell'asse facendo girare le ruote su cui poggia, invece di un attrito di semplice strofinio ne incontra uno di rotazione, ch'è assai minore; e rispetto all'attrito di strofinio che si produce negli assi delle ruote di sostegno è da osservarsi ch'esso agisce con un braccio di leva eguale al raggio dell'asse, mentre la potenza che deve vincerlo ha per braccio di leva il raggio della ruota, quindi vi è grande economia di potenza, ossia di quella frazione della forza di gravità che deve vincere la resistenza al moto.

La macchina di Atwood è rappresentata dalla *fig. 20.* Sulla base AR, sorretta da tre viti che servono a situarla orizzontalmente, si eleva la colonna D. Questa sostiene una tavoletta CE sulla quale poggia il sistema delle quattro ruote che sostengono l'asse della girella. Il filo, che scorre per la sua gola e che tiene sospese le due masse eguali n ed m,attraversa la tavoletta per due fori. Da un lato della colonna D si trova la riga KL divisa in parti eguali per mi-

surare lo spazio percorso dal grave, e dall'altro lato v'è l'orologio a pendolo Z per la misura del tempo. Alla faccia inferiore della tavoletta è aggiustata la leva a gomito *vh*, la quale da una parte termina colla punta *s*, su cui riposerà la massa *m* quando sarà gravata dal peso addizionale *m'*, e dall'altra si congiunge con un meccanismo esistente nella cassa dell'orologio, e che a piacere di chi sperimenta, può fermare l'indice senza far cessare le oscillazioni del pendolo. Quando si vuole sperimentare, si spinge in alto l'asta T, e con questo movimento l'indice sarà fermato, e la punta *s* sarà girata in alto per sostenere la massa *m* gravata dal suo peso addizionale. Indi ad una data pulsazione del pendolo si ritiri in basso l'asta T, e nel medesimo istante verrà liberato l'indice, e la punta *s* sfuggendo disotto la massa *m* ne lascerà libera la caduta. Finalmente lungo l'asta KL scorrono due anelli metallici *r*,*r'* (*fig.* 26 e 27), che per mezzo di viti si possono fermare a quel punto che si vuole dell'asta; l'anello *r* porta un piattello *g* che serve per limitare la caduta della massa *m*, ed *r'* un' anello destinato a fermare il peso addizionale, senza impedire la discesa di *m*.

Premesse queste nozioni sulla costruzione della macchina, facciamoci ora a descriverne gli sperimenti,

— 1° Poggiata la massa *m* col suo peso addizionale sulla punta *s* già preparata a riceverla, si fermi l'anello *r* a tal divisione dell'asta che il grave percuota il piattello *g* nel medesimo tempo in cui avviene una pulsazione del pendolo, e che supporremo essere la terza, per esempio, a contare dal principio della discesa. Indi poniamo l'anello *r* ad un numero di divisione 4 volte maggiore del primo, e ripetiamo l'esperimento; troveremo che la massa *m* sotto l'azione acceleratrice di *m'*, percuoterà il piattello *g* dopo un tempo doppio del primo; e se la lunghezza dell'asta KL lo concede, troveremo che in un tempo triplo la massa *m* per l'azione dello stesso peso *m'* percorrerà uno spazio 9 volte maggiore del primo.

Dunque: *nella discesa verticale dei gravi gli spazî sono proporzionali ai quadrati dei tempi* — Quindi per gli spazî in corrispondenza dei tempi avremo le due serie

Tempi — 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
Spazî — 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

Or se durante il tempo 2 lo spazio è stato 4, e nella prima unità di tempo si è percorso lo spazio 1, bisogna dire che nella 2ª unità lo spazio è stato 3; similmente troveremo che nella 3ª unità di tempo lo spazio è stato 5, nella 4ª 7, 9 nella 5ª ec. Dunque gli spazî percorsi da un grave in una successione di tempi eguali, saranno rappresentati dalla serie dei numeri dispari 1,3,5,7,9,11...

— 2°. Fermiamo l'anello r' ad una divisione qualunque, purchè il peso addizionale m' vi giunga al compiersi di un'oscillazione del pendolo, e l'anello r ad una distanza da r' doppia di quella che separa r' dallo zero della scala. Lasciando allora cadere la massa m dal solito luogo essa lascerà il peso addizionale sull'anello g' e percorrerà lo spazio doppio tra r' ed r per la velocità acquistata nel cadere da $o°$ ad r'. Or questi due spazî saranno percorsi in tempi eguali; dunque se ad un punto qualunque della discesa di un grave la forza acceleratrice cessasse, il grave per la celerità acquistata percorrerebbe in un tempo eguale al primo e con moto uniforme uno spazio doppio del già percorso. L'uniformità del movimento in conseguenza della velocità acquistata verrà facilmente dichiarata avvicinando l'ostacolo g a diverse distanze dall' anello g', poichè si troveranno le frazioni del tempo proporzionali a quelle dello spazio.

Ripetendo la stessa esperienza per diverse distanze di r' dallo zero della scala, e notando in ognuna di esse lo spazio che per la velocità acquistata la massa m percorre nell'unità di tempo, troveremo questi spazî, e quindi i valori delle velocità proporzionali ai tempi pei quali la massa m è discesa sotto l'azione acceleratrice del peso m'.

Dunque: *nella discesa verticale dei gravi la velocità aumenta in ragione del tempo* — La discesa dei gravi è dunque uniformemente accelerata, e quindi la gravità (almeno tra i limiti di queste sperienze) è una forza costante, poichè in ogni elemento di tempo comunica al corpo uno stesso elemento di velocità [1]. Perciò se chiamiamo g la velocità acquistata in $1''$ e v quella acquistata in t secondi, avremo

$$v = gt.$$

[1] Ved la nota (A) alla fine di questo volume.

Dippiù, essendo gli spazi nella caduta dei gravi proporzionali ai quadrati dei tempi, ed essendo lo spazio percorso sotto l'azione della forza acceleratrice metà di quello che in egual tempo il grave percorrerebbe per la sola velocità acquistata; segue che disegnando g lo spazio descritto dal grave per la velocità acquistata in 1″ ed s lo spazio descritto sotto l'azione acceleratrice della gravità in t secondi, dovrà aver luogo la relazione

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Ed eliminando t tra questa equazione e la precedente, si avrà la relazione tra lo spazio e la velocità

$$v^2 = 2gs.$$

Mediante queste tre equazioni si possono risolvere i problemi relativi alla caduta dei gravi nel vôto, quando sia noto il valore di g, che in seguito vedremo potersi facilmente dedurre dalle oscillazioni di un pendolo.

— 3°. Mercè le leggi fin'ora dichiarate sulla discesa dei gravi è facile comprendere che un corpo per giungere ad una data altezza in virtù di un impulso verticale, è d'uopo che parta con una velocità eguale a quella che avrebbe acquistata scendendo dall'altezza a cui si vuole elevare. Per verificare questa deduzione colla macchina di Atwood, bisogna aggiungere all'anello r' il pezzo abc (*fig.*28), il quale viene situato in un piano perpendicolare all'asta KL, e quindi orizzontale. Le due masse m ed n si caricheranno di pesi eguali (che saranno sempre piccola frazione di m ed n), e l'anello r' si farà scorrere lungo l'asta KL, finchè i due pesi addizionali toccheranno gli anelli g' e c. Allora portando la massa m colla sua carica sulla punta s già preparata a riceverla, la massa n discendendo lascerà il suo peso addizionale sull'anello c; quindi la massa m discenderà con moto accelerato finchè il suo peso addizionale non sia fermato dall'anello g', e nel medesimo istante in cui m perde la sua carica, n riprende il suo peso addizionale, e lo trasporta in alto consumando tutta la velocità ch'essa aveva acquistata per la discesa accelerata di m. Or avendo numerato le oscilla-

zioni del pendolo che sono avvenute durante la discesa di m fino all'anello g', troveremo che n salirà approssimativamente all'altezza donde è discesa m, e v'impiegherà presso a poco lo stesso tempo. Questa piccola divergenza dagli esatti valori del tempo e dello spazio dipende dalla resistenza dell'aria e dall'attrito, i quali ostacoli per quanto siano attenuati, fanno tuttavia scorgere la loro influenza in un esperimento così delicato. [1]

27. La legge della discesa dei gravi nel vòto fu scoverta da Galileo, ed una delle prime applicazioni ch'egli ne fece fu quella di determinare la natura della curva che i projettili descriverebbero in un mezzo non resistente. Tartaglia, celebre geometra italiano, aveva già conosciuto che della linea percorsa da una palla lanciata da un' arma da fuoco, nessuna parte è retta; e che per ottenere la massima ampiezza di tiro, la forza di projezione deve fare un angolo di 45° coll'orizzonte. Ma l'ignoranza della legge relativa alla discesa dei gravi gl'impedì conoscere la natura della trajettoria che Galileo trovò facilmente dover essere una parabola, finchè la resistenza dell'aria può esser negletta: e da questa scoverta mossero i primi elementi della scienza balistica.

[1] Volendo determinare colla macchina di Atwood la velocità g che un gravo acquisterebbe cadendo liberamente nel vòto per 1″, si ha l'equazione (vedi *Poisson — Traité de Mécanique — 2e. édition. tome II. n°. 400 et 401.*)

$$g = \frac{2h\,(Pk^2 + (p + p')\,c^2)}{(p - p')\,c^2\,\theta^2},$$

nella quale P rappresenta il peso della ruota, Pk^2 il suo momento d'inerzia (valo a dire la somma dei prodotti di ciascuna sua molecola pel quadrato della distanza dall'asse di rotazione, somma che si può valutare mediante teoremi di Meccanica, quando sia data la forma della ruota), c n'è il raggio; p e p' sono i due pesi attaccati all'estremità del filo; h è l'altezza da cui il peso addizionale fa cadere la massa m (*fig.* 20) nel tempo θ.

Ma questa valutaziono di g non presenterà giammai una soddisfacente approssimazione, poichè oltro al trascurare gli effetti dell'attrito e della resistenza dell'aria, parte da valori vagamente approssimati di Pk^2, h e θ. Le oscillazioni del pendolo somministrano, como vedremo in seguito, un metodo più facile ed incomparabilmente più esatto.

Supponiamo che un corpo A (*fig.*29) riceva un urto secondo Ac, mentre la gravità lo sollecita per la verticale Ah. Il movimento di un corpo essendo indipendente dalla condizione di moto o quiete del sistema a cui appartiene, noi possiamo supporre che il corpo scenda per un canaletto verticale Ah; e che mentre la sua caduta si compie, il canaletto venga spinto orizzontalmente in modo che il punto A di partenza del grave percorra con moto uniforme la retta Ac. Allora se durante la prima unità di tempo per l'azione della gravità il corpo sarebbe giunto in g, ed il punto A in b per la forza d'impulso; per l'azione congiunta delle due forze il luogo del grave sarà nel punto s sulla verticale $bs = Ag$. Similmente si troverà che il suo luogo al terminare la 2ª unità di tempo sarà in t sulla verticale $ct = Ah$, ec. Ma nella discesa dei gravi gli spazî sono proporzionali ai quadrati dei tempi; dunque $ct = Ah$ sarà quadruplo di $bs = Ag$. D'altronde il movimento lungo la Ac essendo uniforme, sarà $Ac = 2\ Ab$; quindi

$$ct : bs = Ac^2 : Ab^2.$$

Or dalla teorica delle linee del 2.º ordine si rileva che la curva Ast per soddisfare a questa proporzione dev'essere una parabola: tal'è dunque la trajettoria dei projettili nel vôto.

CAPO SECONDO.

Discesa dei gravi pei piani inclinati e per gli archi di curva.

28. Su di un piano AB (*fig.*30) inclinato all'orizzontale AC supponiamo posto un corpo m, la cui forza di gravità sia rappresentata in grandezza e direzione da mz; e poichè il corpo trova nel piano AB un ostacolo alla sua tendenza di scendere verticalmente, una parte almeno della sua forza ne verrà distrutta, e questa riproducendosi continuamente si trasformerà in una pressione sul piano. Or ogni pressione è di sua natura normale alla superficie che la riceve, poichè se essa potesse agire sotto un angolo obbliquo, come hs (*fig.*31), la potremmo allora riguardare come risultante di due

forze, l'una *st* posta nel piano tangente alla superficie e che non troverebbe ostacolo nel muovere il punto *s*, e l'altra diretta secondo la normale *ns*, che sarebbe distrutta dalla resistenza della superficie e che sola rappresenterebbe il valore della pressione. Ciò posto, se dal punto *m* in cui supponiamo riunita la forza di gravità del corpo (e più tardi vedremo che questa supposizione è lecita) conduciamo la *mn* perpendicolare al piano AB, secondo essa sarà diretta la componente della gravità, distrutta dal piano. Ma la risultante non può abbandonare, nel caso di due forze, il piano delle componenti; dunque l'altra componente di *mz* dovrà trovarsi nel piano *zmn*, e poichè non deve trovare ostacolo a muovere il corpo *m* pel piano AB, andrà diretta secondo *mp* allo stesso piano parallela. Quindi condotta *zn* paralella ad AB e compiuto il rettangolo *pmnz*, *mp* rappresenterà la forza motrice, ed *mn* la pressione.

Da questa costruzione risultano parecchie conseguenze.

— 1ª Essendo *mz* perpendicolare al piano AC ed *mn* ad AB, sarà il piano *zmn* perpendicolare ai due piani AC e AB, e quindi alla loro comune intersezione projettata in A. Or essendo questa retta perpendicolare al piano *zmn*, dovrà esserla ad ogni retta che giace in questo piano e che passa pel suo piede; sarà dunque perpendicolare alla comune intersezione del piano AB col piano *zmn*, vale a dire alla retta che il grave percorre per l'azione della forza motrice *mp*. Quindi la linea percorsa dal grave sul piano inclinato ha la proprietà di essere la più breve di tutte le rette che dal luogo occupato dal corpo si possono condurre alla intersezione del piano inclinato col piano orizzontale, e di fare con questo piano (come è facile a comprendersi) l'angolo più grande, vale a dire di essere la linea di massimo pendio. Per ciò si rende chiara la ragione per cui una pietra, rotolando sul fianco ineguale di una montagna, descrive una curva sinuosa, la quale si confonderebbe colla linea di massimo pendio, se la velocità acquistata non tendesse continuamente a spingerla per la tangente della sua trajettoria.

— 2ª I due triangoli *pmz*, ABC essendo simili perchè equiangoli, ci danno la proporzione

$$pm : mz = BC : AB,$$

vale a dire che la forza di gravità pel piano inclinato sta alla stessa forza per la verticale, come l'altezza del piano è alla sua lunghezza. Per ciò chiamando g' la prima forza, g la seconda, a l'altezza del piano ed l la sua lunghezza, avremo

$$g' = g\frac{a}{l}.$$

Da questa relazione si deduce che g' varia in ragione diretta di a ed in inversa di l. Così facendo $a = o$, vale a dire il piano orizzontale, sarà $g' = o$ ed il corpo non avrà veruna tendenza al moto; e se fosse $a = l$, il piano sarebbe verticale, e non potendo in conseguenza opporre veruna resistenza alla discesa del grave, dovrà essere $g' = g$, come risulta dalla formola. E se viceversa, lasciando a costante, variasse l, avremmo risultamenti inversi: così un grave scenderà con celerità più grande pel piano BA che pel piano BA'. Ma poichè per una medesima altezza il piano più lungo forma un angolo minore coll'orizzonte, così si rende chiara la ragione per la quale un grave scende con tanta maggiore lentezza per un piano inclinato, per quanto è minore il pendio del piano.

29. Poichè la resistenza di un piano inclinato diminuisce la forza di gravità nel rapporto di g a $g\frac{a}{l}$, costante per tutti i punti del piano, le leggi della discesa saranno le stesse che quelle relative alla caduta verticale, e per la lentezza del movimento che ne facilita l'esplorazione diretta il piano inclinato può sostituire la macchina di Atwood: Galileo, che scovrì le leggi della caduta dei gravi, ne conobbe la realtà sperimentando sopra un piano inclinato. Possiamo dunque usare le stesse formole esposte nel capo precedente, sostituendo però $g\frac{a}{l}$ a g. Così avremo

$$v = g\frac{a}{l}\,t, \quad s = \tfrac{1}{2}\,g\,\frac{a}{l}\,t^2, \quad v^2 = 2g\,\frac{a}{l}\,s.$$

Dalla prima di queste formole rileviamo che nella discesa pei piani inclinati la velocità è proporzionale al tempo, non altri-

menti che nella caduta verticale. La seconda formola ci dà la relazione che esiste tra gli spazî che in un medesimo tempo vengono percorsi da due gravi, l'uno dei quali scenda per un piano inclinato e l'altro per la verticale. Supponiamo, per esempio, che dal punto B (*fig.*32) portano due gravi, l'uno pel piano inclinato BA, l'altro per la verticale BC; ed essendo il primo movimento meno celere del secondo, ne avverrà che quando il grave, che scende per la verticale, sarà pervenuto in C, l'altro starà in un punto n che si tratta di determinare. Chiamiamo a lo spazio BC, x lo spazio Bn; avremo per le note formole

$$a = \tfrac{1}{2} g t^2, \quad x = \tfrac{1}{2} g \frac{a}{l} t^2.$$

Quindi $$x : a = \frac{a}{l} : 1 = a : l$$

Or se dal punto C conduciamo Cn perpendicolare a BA, per una nota proprietà del triangolo avremo

$$Bn : BC = BC : BA,$$

ossia $$Bn : a = a ; l ;$$

dunque $x = Bn$. E se immaginiamo una serie di piani inclinati BA, BA′, BA″, ai quali sia comune l'orizzontale projettata in B, e che da questo punto partano nel tempo stesso dei gravi per la verticale BC e pei piani inclinati BA, BA′, BA″, ec: avremo i luoghi dei gravi sui rispettivi piani inclinati, quando il grave che scende per la verticale sia giunto C, conducendo da questo punto le perpendicolari Cn, Cn', Cn''. Or se descriviamo una circonferenza che abbia BC per diametro, essa passerà necessariamente pei punti n, n' n''; donde rileviamo questa curiosa proprietà fisica del cerchio; fermata questa figura intorno ad un diametro verticale, dalla cui estremità superiore siano condotte diverse corde, queste ed il diametro verticale saranno percorsi in tempi eguali da altrettanti gravi che partissero dal punto di comune intersezione.

Eguale ancora sarà la durata della discesa per le corde nC,

$n'C$, $n''C$ che convengono all'estremità inferiore del diametro BC; poichè conducendo pel punto n la nz perpendicolare a BC, e facendo $nC = l$, $Cz = a$, avremo

$$l = \frac{1}{2} g \frac{a}{l} t^2,$$

donde
$$t^2 = \frac{2l^2}{ga}.$$

Ma facendo $BC = 2r$; abbiamo per un noto teorema di Geometria

$$l^2 = 2ra;$$

quindi sostituendo questo valore nell' equazione precedente, si ottiene

$$t^2 = \frac{4ra}{ga} = 2 \frac{2r}{g},$$

relazione che da il tempo della discesa pel diametro verticale BC: dunque questo diametro e le diverse corde nC, n'C, n''C, ec. saranno percorse in tempi eguali.

Finalmente dalla formola $v = 2g \frac{a}{l} s$ si ottiene un teorema, la cui grande utilità ci verrà bentosto dichiarata dalla teorica del pendolo. Volendo conoscere la velocità che avrà il grave nell'estramità A del piano inclinato BA, dovremo ad s sostituire la lunghezza l del piano, e per questa sostituzione la formola $v^2 = 2g \frac{a}{l} s$ diverrà $v^2 = 2ga$: vale a dire che in A il grave avrà la stessa velocità che avrebbe avuta nel punto C scendendo per la verticale BC.

E se in vece di un piano inclinato, ne immaginiamo due consecutivi AB e BC (*fig.* 43), la velocità acquistata scendendo per AB dovrà, quando il grave entrerà nel piano BC, decomporsi in due l'una perpendicolare a BC e che da questo piano verrà distrutta, e l'altra secondo BC, la quale si aggiungerà agli aumenti di velocità acquistati nella discesa pel secondo piano. Conducendo pel punto A la retta An perpendicolare a Bn, è chiaro che la

velocità con cui il grave entra nel piano BC, sta a quella con cui lasciava AB, come Bn ad AB; ma nel triangolo rettangolo BAn conducendo la nz perpendicolare sull'ipotenusa AB, abbiamo la proporzione

$$Bn^2 : AB^2 = Bz : AB,$$

donde
$$Bn : AB = \sqrt{Bz} : \sqrt{AB},$$

e d'altronde le velocità di entrata in BC e di uscita da AB sono tra loro come Bn ad AB: esse dunque saranno come $\sqrt{Bz} : \sqrt{AB}$. Ma $\sqrt{AB}$ per la formola $v^2 = 2g\frac{a}{l}s$ è proporzionale alla velocità con cui il grave giunge all'estremo B del piano AB; dunque esso entrerà nel piano BC colla velocità che avrebbe acquistata scendendo pel piano zB. Laonde se pel punto z conduciamo la orizzontale zd fino ad incontrare il prolungamento del piano CB in d, il grave scendendo per zB avrà al termine della sua corsa la stessa velocità, che avrebbe acquistata venendo per dB. Quindi la velocità finale in C sarà dovuta non all'altezza AK, ma all'altezza de.[1]

Il rapporto di Bn a BA è una frazione che decresce coll'aumentare dell'angolo ABn, dimodochè essa diviene nulla quando l'angolo ABn = 90°; e viceversa si approssimerà continuamente all'unità, come l'angolo ABn sarà più piccolo. Ciò posto, col cen-

[1] Galileo pose il falso principio che un grave scendendo per una serie di piani inclinati dovesse avere al termine della sua corsa quella velocità che avrebbe acquistata per la verticale della sua caduta. In questo errore incorsero parecchi, non escluso lo stesso Huyghens, non avvertendo (ciò che desta meraviglia) che essendo il principio indipendente dall'angolo che i piani formano tra essi, dovrebbe aver luogo quando anche questo angolo fosse retto; vale a dire che un grave, cadendo sopra un piano orizzontale, dovrebbe su questo continuare il suo movimento colla velocità finale: risultamento diametralmente opposto al fatto. Varignon nel 1693 fu il primo a rendere avvertiti i meccanici della falsità di questo principio.

tro B e coll'intervallo BA descriviamo la semi-circonferenza tAs, e per una nota proprietà del cerchio avremo

$$tn : nA = nA : ns.$$

Quindi se l'angolo ABn è infinitamente piccolo, tale sarà ancora nA, e perciò ns sarà un infinitesimo del 2° ordine. Or ns è proporzionale alla differenza esistente tra la velocità che il grave acquista scendendo pel piano AB e quella con cui entra in BC; dunque se l'angolo dei due piani differisce di una quantità infinitesima da 180°, la perdita di velocità sarà nulla. Ma se in vece di due o più piani consideriamo gli elementi consecutivi della curva, limite del contorno poligonale descritto dal grave sopra una serie di piani, essi elementi faranno tra loro un angolo pressochè di 180°; poichè sappiamo dalla Geometria che l'angolo di loro inclinazione è eguale al supplemento di quello formato dalle rispettive normali, le quali essendo infinitamente prossime formano tra loro un angolo infinitesimo. Quindi la perdita di velocità che un grave, scendendo per un arco di curva, si troverà di aver fatta al termine della sua corsa, sarà rappresentata da un infinitesimo del 2° ordine ripetuto tante volte per quanti sono gli elementi dell'arco di curva, vale a dire ripetuto per un numero infinitamente grande. Or le leggi del calcolo infinitesimale stabiliscono che questo prodotto è un infinitesimo del 1° ordine, e perciò trascurabile. Dunque un grave scendendo per un arco di curva, in ogni punto di questa avrà la stessa velocità che avrebbe acquistata scendendo per la verticale che misura l'altezza della sua caduta.

CAPO TERZO.

Prime nozioni sul pendolo — Proporzionalità della gravità alle masse — Centro di gravità — Misure delle masse.

30. Sappiamo (n° 25) che un corpo A (*fig.* 35) sospeso ad un filo OA starà in equilibrio, quando la direzione del filo sia vertica-

le, ossia perpendicolare alla superficie delle acque tranquille; quindi se trasportiamo il corpo A per l'arco AB, e poi l'abbandoniamo a se stesso, esso ritornerà alla prima posizione scendendo per l'arco BA. E se nessun ostacolo si opponesse a questo movimento, il corpo avrebbe in A una velocità corrispondente all'altezza hA, per la quale, com'è noto, dovrebbe salire fino al punto C, descrivendo l'arco AC = AB: da questo punto poi ritornerebbe in A per salire una seconda volta in B, e continuare così un movimento perpetuo. Ma la resistenza dell'aria e l'attrito al punto di sospensione fanno che il corpo abbia in A una velocità minore di quella che avrebbe acquistata scendendo dall'altezza hA; ed a questa perdita aggiungendo l'altra che per le medesime resistenze esso farà nel salire per l'arco AC, comprenderemo facilmente che dovrà fermarsi in un punto C′ intermedio ad A e C. Per la stessa ragione dovrà nel suo ritorno oltrepassare il punto A di un arco minore di AC′; e così diminuendo continuamente l'estensione della sua corsa, tornerà finalmente allo stato di riposo.

Un corpo così sospeso forma un *pendolo*; il movimento pel quale va da un lato all'altro della sua posizione di equilibrio dicesi *oscillazione*, ed *ampiezza dell'oscillazione* è la quantità angolare del suo movimento.

31. Quando il pendolo è in una posizione OB diversa dalla verticale OA, la forza di gravità Bz si dovrà immaginare decomposta in due, l'una Bn secondo il prolungamento del raggio OB e che produrrà la tensione del filo, e l'altra secondo la tangente Bt al punto dell'arco di oscillazione, occupato dal corpo, e che rappresenta la forza motrice; e chiamando α l'angolo AOB, e g la forza di gravità secondo la verticale Bz sarà. $Bn = g.\cos\alpha$, e $Bt = g.\mathrm{sen}\alpha$. Dunque la componente della gravità che sollecita un pendolo a discendere per l'arco di oscillazione non è costante, ma variabile secondo il seno dell'angolo che il filo di sospensione forma colla verticale. Or se quest'angolo è abbastanza piccolo, potremo sostituire l'arco al seno, ed allora la forza acceleratrice sarà proporzionale all'arco che rimane a percorrere, perchè il grave

giunga al punto infimo della sua corsa. Da questa relazione segue che se BOA, B'OA sono gli angoli, pei quali la ragione degli archi può essere sostituita a quelli dei seni, il pendolo impiegherà tanto tempo a descrivere l'arco BA che l'arco B'A; e perciò le ampiezze di oscillazione BC e B'C' avranno eguale durata. Ed in vero se gli archetti consecutivi descritti nella successione degli elementi del tempo impiegato dal grave nello scendere da B' ad A, formano la serie

$$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots ;$$

gli archetti percorsi sotto le stesse condizioni nella discesa da B ad A, saranno

$$n\alpha, n\alpha', n\alpha'', n\alpha''', \ldots$$

n indicando il rapporto di BA a B'A; poichè, date tutte le altre cose eguali, gli spazi dovranno essere proporzionali alle velocità impresse, e quindi alle forze. Or indicando con $\Sigma\alpha$ la somma degli archetti che compongono l'arco B'A, e che sono stati descritti negli elementi di tempo componenti la durata della discesa per questo arco, avremo

$$\frac{\mathrm{BA}}{\Sigma\alpha} = n,$$

donde $$\mathrm{BA} = n\Sigma\alpha.$$

Ma vi sono tanti elementi eguali di tempo, quanti sono gli archetti α; dunque le discese per gli archi BA e B'A impiegheranno eguali numeri di elementi di tempo, vale a dire avranno eguali durate. Questa proprietà, di cui gode il pendolo quando oscilla per archi piccoli, è chiamata *isocronismo*; e la scoverta di essa, che ha dato il cronometro all'Astronomia, il misuratore della gravità alla Fisica, ed un nuovo scandaglio alla Geologia, è stata fatta da un giovanetto a 18 anni, mentre osservava le oscillazioni di una lampada sospesa nella chiesa primaziale di Pisa; ma questo giovanetto era Galileo, che annunziava il suo genio con una scoverta di primo ordine.

32. Poste queste prime nozioni sulla teorica del pendolo, veniamo ad un esperimento del Newton. Questi sospese due vasi di legno, rotondi ed eguali, a due fili della lunghezza di 11 piedi. Uno dei vasi non conteneva che legno, e nell'altro poneva successivamente un egual peso di oro, argento, piombo, vetro, arena, sal comune, legno, acqua, frumento. Indi allontanava egualmente i due pendoli dalla verticale e nel medesimo senso, ed osservando le loro oscillazioni per lunga pezza di tempo, egli trovava un accordo perfetto nel loro andare e ritornare. Questa identità di movimento dichiarava che la forza acceleratrice $g.sen\alpha$ era la stessa pei due pendoli; e poichè questi andavano sempre insieme, e per la loro eguale lunghezza descrivevano archi di eguale curvatura, così ad ogn'istante del loro movimento il fattore $sen\alpha$ doveva avere lo stesso valore pei due pendoli, ed in conseguenza l'altro fattore g della forza acceleratrice doveva essere indipendente dalla natura della sostanza sottoposta all'esperimento. Sappiamo inoltre (n°10) che la forza è un prodotto, di cui sono fattori la massa e la velocità; per ciò se nell'esperimento di Newton erano eguali le masse e le velocità, eguali dovevano esser le forze, ed egual dose n'era compartita ad ogni molecola della massa. Dunque la gravità è una forza molecolare costante, almeno per uno stesso luogo di osservazione.

Questa verità, presentita da Epicuro e da Lucrezio, fu per la prima volta dimostrata da Galileo, mentre studiava filosofia nell'università di Pisa. Avverso al sistema aristotelico, che allora dominava nelle scuole, egli ne combatteva i principî, e tra questi la proporzionalità della celerità di caduta al peso del grave. Allora non esisteva la macchina pneumatica, la quale dimostra che tutti i corpi cadono con la stessa velocità nel vôto, nè la Dinamica tuttavia nascente poteva dedurre dalle oscillazioni del pendolo la ragione della gravità alla massa. E quantunque Galileo mancasse di questi sussidî, gli restavano non pertanto le immense risorse di un genio osservatore pel quale egli conobbe la vera ragione della gravità al peso come facile illazione di un semplicisimo ragionamento, che ogni uomo avrebbe potuto fare, ma

che intanto nè Aristotile nè alcuno dei suoi seguaci aveva giammai fatto. Se noi facciamo cadere, egli pensava, da una parte un'oncia di piombo, e da un'altra parte dieci oncie separate della medesima sostanza e poste le une sulle altre, troveremo che la velocità è la stessa da una parte e dall'altra. Or che le dieci oncie facciano una massa compatta, ovvero debolmente aderente, ciò non può cagionare differenza di velocità nella caduta; è dunque impossibile che dieci oncie abbiano a cadere con una velocità maggiore che un'oncia. E per dimostrare la realtà della sua illazione, egli alla presenza di un numeroso concorso di dotti e di popolo fece cadere da una grande altezza diverse palle di oro, piombo, rame, porfido e cera, e si vide che la sola palla di cera distava di circa quattro pollici dal suolo quando le altre lo avevano già toccato contemporaneamente. Galileo attribuì il ritardo della palla di cera alla resistenza dell'aria; spiegazione che più tardi venne confermata dalle sperienze di Desagouliers, il quale nel tempio di S. Paolo a Londra fece cadere dall'altezza di 272 piedi delle vesciche vòte, e delle palle di carta e di vetro. E per comprendere come l'aria possa ritardare inegualmente la caduta di diversi corpi, è da por mente che la sua resistenza, date le altre cose eguali, è proporzionale alla superficie che la riceve; quindi eguale resistenza, e perciò eguale perdita di forza soffriranno due corpi di eguali figure. Chiamando k questa perdita, m ed m' le masse dei due corpi, ogni molecola della massa m perderà una quantità di forza rappresentata da $\frac{k}{m}$, ed m' perderà $\frac{k}{m'}$. Or se m è più grande di m', sarà $\frac{k}{m}$ minore di $\frac{k}{m'}$; per ciò per le molecole di m vi sarà un maggior residuo di forza che per quelle di m'. Donde rileviamo la ragione per la quale i corpi meno densi, e che urtano l'aria con una superficie maggiore, sono quelli che scendono più lentamente: ognuno conosce la celerità devastatrice della grandine e la dolce lentezza dei fiocchi di neve.

33. La gravità operando egualmente su tutte le molecole della materia, ed a piccole distanze essa agendo per direzioni fi-

sicamente parallele; noi possiamo riguardare i gravi, come sistemi di punti materiali, animati da forze paralelle eguali. E poichè le forze paralelle dirette nel medesimo senso hanno sempre un centro; dunque tutti i corpi avranno un *centro di gravità*, vale a dire un punto, per cui passa la risultante di tutti gli elementi molecolari della forza di gravità. Quando il corpo è terminato da una figura matematicamente definibile, e che sia fisicamente omogeneo, ossia che le sue molecole si trovino similmente ordinate in tutta la sua estensione, allora la ricerca del centro di gravità diviene un problema geometrico, che nella maggior parte dei casi si risolve mediante il seguente principio.

Ogni figura, che abbia un punto, una linea o un piano di simmetria, dovrà in essi avere il suo centro di gravità. Quindi

— 1° Un cerchio, una sfera, un'elissoide avranno il loro centro di gravità nel centro di figura: un cilindro l'avrà nel punto medio del suo asse, un parallelepipedo nel punto d'intersezione dei tre piani di simmetria — Il centro di gravità degli animali vertebrati finchè conservano la stazione normale, è nel piano di simmetria della loro figura, il quale passa lungo la spina vertebrale. Ma essendo la posizione del centro di più forze paralelle funzione sì dell'intensità delle forze, che del sito dei loro punti di applicazione; così il luogo del centro di gravità scorrerà lungo il piano di simmetria, potrà eziandio da esso allontanarsi in un senso o nell'altro, secondo le varie mosse del corpo animale. Mercè queste vedute teoretiche i fisiologi hanno potuto collegare al fatto della gravità i fenomeni della stazione, del passo, del salto, della corsa e di tutti gli atteggiamenti in cui il corpo animale deve disporsi per conservare l'equilibrio nei suoi diversi movimenti.

— 2° Il centro di gravità di una linea retta [1] è nel punto

[1] Le espressioni *linea* e *superficie* sono qui prese nel senso fisico, e non già nel senso geometrico; vale e dire che per *linea* s'intende un cilindro sottilissimo, e per *superficie* una falda di doppiezza infinitesima. Sotto

medio della sua lunghezza ; e mediante questo semplicissimo teorema si ottiene il centro di gravità di un triangolo e di un parallelogrammo. Sia ABC il triangolo dato (*fig.* 37): si congiunga il vertice B col punto *m*, medio del lato opposto AC, e parallelamente a questo lato s'immagini divisa la superficie del triangolo in tanti elementi rettilinei, come *hl*. Ciascun elemento sarà diviso per metà dalla retta B*m*; su questa retta staranno i loro centri di gravità, e quindi il centro di gravità dell'intera superficie. Similmente troveremo che questo centro dovrà stare ancora sulla retta C*n* che unisce un altro vertice C col punto medio *n* del lato opposto AB: esso dunque starà nel punto d'intersezione *o*. Or congiungendo *m* con *n* si avrà *mn* paralella a BC, e quindi la proporzione

$$BC : mn = Bo : om \,;$$

ma $$BC : mn = BA : An = 2 : 1 \,;$$

dunque $$Bo : om = 2 : 1 \,,$$

ossia $Bo = \frac{2}{3}Bm$. Dunque il centro di gravità di un triangolo è ai $\frac{2}{3}$ della retta che unisce uno dei suoi vertici colla metà del lato opposto.

Per la stessa ragione in un parallelogrammo qualunque ABCD (*fig.* 33) congiungendo le metà dei lati opposti mendiante le rette *mn*, *ts*, si avrà nel loro punto d'intersezione *o* il centro di gravità richiesto. Or se conduciamo le due diagonali BD, AC, è facile dimostrare che esse passeranno pel punto *o* già determinato: dunque il centro di gravità di un parallelogrammo è nel punto d'intersezione delle due diagonali,

Mercè la conoscenza del centro di gravità di un triangolo è facile determinare il centro di gravità di qualunque poligono rettilineo. Sia BCDEF (*fig.* 41) il poligono dato: si conducano i due assi rettangolari *Ay*, *Ax*, e si divida il poligono in triangoli per mezzo delle diagonali BD, BE. Siano *o*, *o'*, *o''* i cen-

questa veduta una linea ed una superficie saranno composte di molecole pesanti, e per ciò avranno un centro di gravità.

tri di gravità dei triangoli; e chiamiamo s, s', s'' le loro aree, $y\ x$, $y'\ x'$, $y''\ x''$ le coordinate dei loro centri, ed X Y quelle del centro di gravità richiesto. Per le formole del n° 20 avremo

$$X = \frac{sx + s'x' + s''x''}{s + s' + s''},$$

$$Y = \frac{sy + s'y' + s''y''}{s + s' + s''}.$$

Per gli stessi principî si ottiene il centro di gravità di una piramide. Incominciamo dal caso di una piramide triangolare e sia ABCD (*fig.* 38). Se in essa facciamo la sezione stv con un piano parallelo alla base BCD, e congiungiamo il vertice A col centro o di gravità della base, la retta Ao passerà pel punto l centro di gravità del triangolo stv. Ed in vero se pei due vertici A e D, e pel punto m medio di BC conduciamo il piano AmD, questo taglierà la st in due parti eguali nel punto z, ed il triangolo stv secondo la zv, la quale giacendo nello stesso piano della Ao, dovrà necessariamente incontrarla in un punto l. Or i due triangoli ADm, Avz essendo simili, ci danno la proporzione

$$AD : Av = Dm : vz = \tfrac{2}{3}\,Dm : \tfrac{2}{3}\,vz;$$

e pei tringoli simili ADo, Avl abbiamo ancora l' altra proporzione

$$AD : Av = \tfrac{2}{3}Dm : vl\,;$$

dunque $vl = \frac{2}{3}vz$, e per ciò il punto d'intersezione l è centro di gravità del triangolo stv. Quindi la retta Ao, che congiunge il centro di gravità della base col vertice della piramide passerà pei centri di gravità di tutte le falde triangolari parallele a BCD, e dovrà in conseguenza contenere il centro di gravità dell'intero solido. Si mostrerebbe del pari che il centro richiesto dev'essere ancora sulla Dh che unisce il vertice D col centro di gravità della faccia ABC : dunque starà nell'intersezione g delle due rette Ao, Dh. Or la oh dividendo in parti pro-

porzionali i due lati Am e mD del triangolo AmD, sarà parallela al terzo lato AD, e perciò avrà luogo la proporzione.

$$og : gA = oh : DA = mo : mD = 1 : 3 ;$$

sarà dunque $Ag = \frac{3}{4}$ Ao.

Lo stesso teorema ha luogo ancora per una piramide poligonale. Congiungendo in essa il vertice A (*fig.* 36) col centro di gravità o del poligono di base, si dimostrerà come nel caso precedente che i centri di gravità di tutte le falde poligonali paralelle alla base staranno sulla Ao. Diviso indi il poligono di base in triangoli, e condotto il piano mm paralello alla base e che tagli la Ao in un punto g tale che sia $Ag = \frac{3}{4}$ Ao, sarà facile dimostrare che i centri di gravità delle piramidi triangolari staranno sul piano mm. Su questo piano starà dunque il centro di gravità richiesto; e poichè deve stare ancora sulla retta Ao, starà dunque nella intersezione g della Ao col piano mm. Quindi il centro di gravità di una piramide qualunque starà ai $\frac{3}{4}$ della retta che unisce il vertice col centro di gravità della base. [1]

34. Poichè l'equilibrio di un sistema di forze si ottiene, opponendo alla loro risultante una forza eguale, così un corpo sospeso o sostenuto, starà in equilibrio quando il filo di sospensione o il punto di sostegno staranno sulla verticale che passa pel centro di gravità del corpo; e se questo poggiasse su diversi punti, allora basterebbe pel suo equilibrio che la verticale menata pel suo centro di gravità cadesse dentro il poligono formato dalle rette che congiungono i punti di sostegno. È d'uopo però osservare che se queste condizioni soddisfatte producono l'equilibrio di un corpo, purtuttavia esse non bastano per assicurarne la permanenza contro l'azione di forze perturbatrici. Se immaginiamo, per esempio, una sfera omogenea poggiata sopra un piano orizzontale, il suo centro di gravità starà

[1] Per ulteriori applicazioni del principio di simmetria si vegga la nota (B) alla fine del volume.

sulla verticale del suo punto di contatto, e per ciò l'equilibrio avrà luogo; ma dietro il più piccolo urto la sfera lascerà la prima posizione, e ne prenderà un'altra nella quale rimarrà egualmente in equilibrio. Questo stato vien distinto col nome di *equilibrio indifferente*; ed esso ha luogo per un corpo, quando in tutte le possibili situazioni conserva costante la distanza del suo centro di gravità dal punto di sospensione o di sostegno. Ma consideriamo il parallelepipedo BC (*fig.* 40), che stando in equilibrio sulla base AB, sia da una forza obbligato a rotare intorno al punto B e prendere la posizione BC'. Il suo centro di gravità o, appena nella sua rotazione avrà oltrepassato il punto z sulla faccia BD, tenderà discendere per l'arco $zo'o''$, finchè non sia pervenuto al punto più basso o''. Al contrario, quando il parallelepipedo abbia la posizione BC'', e che trasportato in BC' venga abbandonato a se stesso, allora in vece di proseguire il suo moto, ritornerà alla prima posizione BC''. Il corpo che distratto dalla sua posizione di equilibrio, non ha veruna tendenza di ritornarvi, si dirà di avere un *equilibrio instabile*, e questo viceversa sarà *stabile*, se il corpo tenderà al posto che aveva. Nel primo caso il centro di gravità sarà il più alto, e nel secondo il più basso possibile. [1]

35. Dall'essere la gravità identica per tutte le molecole della materia segue ancora che chiamando g l'intensità molecolare di questa forza ed m il numero delle molecole, la quantità totale p di questa forza, ossia il *peso* del corpo, sarà rappresentata dal prodotto mg. Similmente per un'altra massa m' il peso p' sarà rappresentato dal prodotto $m'g$; quindi la proporzione

$$p : p' = mg : m'g = m : m',$$

vale a dire che le masse dei corpi sono proporzionali ai loro pesi. Basta dunque saper determinare l'eguaglianza di due pesi per esser sicuro dell'eguaglianza delle rispettive masse.

A tal fine immaginiamo una retta inflessibile ab,(*fig.* 34) mobile

[1] Ved. nota (C) alla fine del volume.

intorno al punto fisso *c*, e negli estremi di essa sospese le due masse *m* ed *m'*. Poichè i pesi di queste masse tenderanno a far rotare la retta in opposte direzioni, essa starà in equilibrio, quando il momento (n° 21) $m.ac = m'.bc$; in conseguenza se $ac = bc$, sarà nel caso di equilibrio $m = m'$. È d'uopo però che i tre punti *a*,*c*,*b* siano in linea retta, poichè se le due rette *ac* e *cb* facessero un angolo rientrante come nella *fig.*42 o saliente come nella *fig.*44, l'equilibrio sarebbe instabile nel primo caso, e potrebbe aver luogo nel secondo senza l'eguaglianza delle masse. Ed in vero se nel primo caso le masse *m* ed *m'* (*fig.* 42) sono in equilibrio intorno al punto *c*, e che il sistema riceva un urto, pel quale il punto *a* passi in *a'* e *b* in *b'*, in questo movimento esso non avrà alcuna tendenza di tornare alla prima posizione, poichè il momento di *m'* andrà crescendo, e decrescendo quello di *m*. Nel caso poi di un angolo saliente supponiamo che gli estremi *a* e *b* (*fig.* 44) delle due rette eguali si trovino sopra una stessa orizzontale, e che la massa *m* sia più grande di *m'*. Dietro questa ipotesi *a* dovrà scendere per l'arco *aa'*, e *b* salire lungo l'arco *bb'*; quindi il momento di *m* andrà diminuendo, e crescendo quello di *m'*; e perciò se i due momenti erano dapprima diseguali, finiranno poi coll'essere eguali, ed allora vi sarà equilibrio senza che esista l'eguaglianza delle masse.

Or sostituiamo alla retta inflessibile un'asta rigida, ed ai fili di sospensione due coppe, ed avremo l'istrumento conosciuto sotto il nome di *bilancia*. E se nell'ipotesi di una retta inflessibile l'asse di rotazione doveva necessariamente identificarsi col centro di gravità, e quindi rendere l'equilibrio indifferente; nel fatto della bilancia il centro di gravità può trovarsi fuori dell'asse di rotazione. Ma poichè l'uso istesso dell'istrumento richiede che l'asta abbia una forma simmetrica rispetto al piano normale che passa per l'asse di rotazione, così il centro di gravità non potendo abbandonare il piano di simmetria, nè dovendo stare nell'asse, dovrà necessariamente essergli superiore o inferiore. Nel primo caso l'equilibrio della bilancia sarebbe instabile, poichè se il centro di gravità esce dal piano verticale che passa per l'asse di rotazione, non tenderà

più di ritornarvi; ma se il centro di gravità fosse in *n* (*fig.* 39) inferiore all'asse *c*, l'equilibrio della bilancia sarebbe stabile, poichè il suo movimento di rotazione innalzando il centro di gravità, verrebbe a trasformarsi in movimento di oscillazione intorno alla prima posizione di equilibrio.

Per determinare l'esatto equilibrio di una bilancia, l'asta è sostenuta da una colonna che poggia perpendicolarmente sopra una base, la quale si può rendere orizzontale per mezzo di quattro viti che la sostengono. All'asta è fermato ad angoli retti un'indice, la cui punta può scorrere lungo un arco graduato, sul quale è segnato il luogo a cui l'indice deve corrispondere nella sua direzione verticale. Quando l'indice corrisponderà a questo luogo, e che la bilancia sia esatta, saranno eguali le masse di cui saranno caricate le coppe. Or la rigorosa esattezza di una bilancia richiede — 1° che le distanze dei punti di sospensione delle coppe dall'asse di rotazione siano geometricamente eguali — 2° che le due braccia dell'asta siano egualmente pesanti, dimodochè essa, scaricata delle coppe, presenti nel suo equilibrio l'asse di rotazione ed i due pundi sospensione in una medesima orizzontale — 3° che le due coppe siano dello stesso peso — 4° che la colonna sia esattamente perpendicolare alla base, e l'indice all'asta. In realtà queste condizioni non potranno essere soddisfatte che più o meno approssimatamente secondo la perizia del costruttore; ed intanto vi ha dei casi in cui il peso di un corpo vuol essere rigorosamente determinato. Allora bisognerà tenere il seguente metodo inventato da Borda, e conosciuto sotto il nome di *metodo delle doppie pesate.* Si pone in una delle coppe il corpo che si vuol pesare, e si equilibra la bilancia con pezzi di qualsivoglia sostanza messi nell'altra coppa; indi si toglie il corpo, ed in vece sua si pongono tanti pesi per quanti ne richiede il ritorno all'equilibrio: è evidente che tra i limiti di sensibilità della bilancia i pesi sostituiti debbono formare una massa eguale a quella del corpo che si voleva pesare.

Per farsi un'idea esatta di ciò che i costruttori chiamano *sensibilità* in una bilancia, è d'uopo osservare che il suo asse di rotazione per mettersi in movimento deve vincere l'attrito che incontra

sulla superficie di sostegno, e di più il momento del centro di gravità dell'asta; il quale dovendo per la stabilità dell'equilibrio essere inferiore all'asse di rotazione, opporrà al movimento della bilancia una resistenza tanto più grande, per quanto sarà più lontano da questo asse. Di queste due resistenze si attenua la prima facendo poggiar l'asta sulla colonna di sostegno mediante il prisma triangolare *a* (*fig.* 46) di acciaio temprato, il cui spigolo acuminato è a contatto del pezzo *cd* anche di acciajo o meglio di agata. Si cerca inoltre di rendere l'asta più leggiera e lunga che sia possibile, affinchè l'attrito, che l'esperienza ha fatto conoscere proporzionale alla pressione, resti vieppiù attenuato dalla picciolezza del peso, e per la lunghezza delle braccia aumenti il momento della differenza delle due masse situate nelle coppe. Ma queste due condizioni sono sempre subordinate al limite di carica che si vuol dare alla bilancia; poichè l'asta non deve ricevere alcuna flessione, per la quale l'asse di rotazione e quelli destinati alla sospensione delle coppe cessassero di restare nel medesimo piano. Rispetto poi alla resistenza che offre il momento del centro di gravità dell'asta, essa si può variare mediante la palla metallica *b* mobile lungo la vite *e*: facendo scendere o salire la palla, il centro di gravità verrà ad allontanarsi o ad avvicinarsi all'asse di rotazione. Ciò posto, se una bilancia sia stata costruita per essere tutto al più gravata di 100 grammi in ciascuna coppa, e che sotto questa carica un peso non minore di un milligrammo sia atto a squilibrarla, allora si dirà che la bilancia è sensibile ad un milligrammo, e le pesate con essa eseguite non si potranno riguardare esatte che tra i limiti di un milligrammo.

CAPO QUARTO.

Complemento della teoria del pendolo — Variazione della gravità secondo la latitudine del luogo di osservazione.

36. Immaginiamo un atomo materiale A (*fig.*35) sospeso ad un punto fisso O per mezzo di un filo inestensibile e senza peso. Allon-

taniamolo dalla verticale, e quanto sarà giunto in B, abbandoniamolo a se stesso; esso scenderà per l'arco BA, quindi salirà per AC, compiendo quel moto che abbiamo detto(n°30)nominarsi *oscillazione*. Chiamiamo g la velocità che l'atomo acquisterebbe scendendo verticalmente per un minuto secondo nello spazio vôto, r la lunghezza del filo di sospensione, h la freccia Ah dell'arco di oscillazione, t il numero di secondi necessario a percorrere quest'arco, e π il rapporto della circonferenza al diametro;il calcolo dimostra [1] ch'essendo h una piccola frazione di r, tutte queste quantità sono ligate dall'equazione

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}\left(1 + \frac{h}{8r}\right).$$

E poichè chiamando φ l'arco AB di semi-oscillazione, si ha $Ah = OA - Oh = r - r.cos\varphi = r\,(1 - cos\varphi) = 2r.sen^2 \tfrac{1}{2}\varphi$; così l'equazione precedente può mettersi sotto la forma

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}\left(1 + \frac{1}{4} sen^2 \frac{1}{2} \varphi\right).$$

Se φ è infinitesimo, sarà $sen^2 \tfrac{1}{2} \varphi = o$, ed il tempo θ di questa oscillazione sarà dato dall'equazione

$$\theta = \pi \sqrt{\frac{r}{g}},$$

valore ch' essendo indipendente dalla freccia dell'arco di oscillazione, dimostra che i movimenti di un pendolo per essere isocroni debbono eseguirsi per archi infinitesimi. Ma poichè della misura diretta ne sono capaci le sole quantità finite, così nell'equazione che dà il valore di t sostituiremo θ a $\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, ed avremo

$$t = \theta\left(1 + \frac{1}{4} sen^2 \frac{1}{2} \varphi\right)$$

da cui otterremo il valore di θ, quando saranno dati t e φ.

[1] Ved. la nota (D).

Or supposta la possibilità del pendolo, quale l'abbiamo immaginato, e che i meccanici hanno denominato *pendolo semplice*, dalla formola $\theta = \sqrt{\frac{r}{g}}$ si ottengono i seguenti corollari.

— 1° Risolvendo l'equazione rispetto a g, si ha

$$g = \frac{\pi^2 r}{\theta^2},$$

ed in conseguenza facendo $\theta = 1''$, si avrà

$$g = \pi^2 r.$$

Dunque basterà saper misurare esattamente la lunghezza r del filo di sospensione, per ottenere il valore di g espresso colla stessa unità lineare adoperata nella misura di r. [1]

— 2° Siano θ e θ' le durate di oscillazione di due pendoli semplici di cui r ed r' sono le lunghezze; avremo

$$\theta : \theta' = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} : \pi\sqrt{\frac{r'}{g}} = \sqrt{r} : \sqrt{r'}\ ;$$

vale a dire che per un medesimo valore di g, le durate di oscillazione per archi infinitesimi sono proporzionali alle radici quadrate delle lunghezze dei pendoli.

— 3° Supponendo g variabile da un luogo all'altro, ed r costante, varierà ancora θ, ed avremo

$$\theta : \theta' = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} : \pi\sqrt{\frac{r}{g'}} = \sqrt{g'} : \sqrt{g}\ ;$$

donde $\theta^2 : \theta'^2 = g' : g.$

Ma le durate θ e θ' essendo inversamente proporzionali alle quantità N ed N′ di oscillazioni fatte in un medesimo tempo, sarà

$$\theta^2 : \theta'^2 = N'^2 : N^2\ ;$$

quindi $g' : g = N'^2 : N^2.$

[1] π esprimendo un rapporto, è necessariamente un numero astratto; quindi il prodotto $\pi^2.r$, valore di g, sarà un numero concreto della stessa natura di r. *(Vedi la mia aritmetica — 2a. edizione — pag. 20).*

Dunque se uno stesso pendolo trasportato in diversi luoghi facesse diverse quantità di oscillazioni in un medesimo tempo, dal rapporto dei quadrati delle quantità di oscillazioni avremmo quello delle corrispondenti intensioni della forza di gravità.

37. Per attuare il concetto puramente matematico del pendolo semplice, i fisici hanno cercato risolvere il seguente problema: *determinare la lunghezza del pendolo semplice, sincrono ad un dato pendolo composto*; chiamando *pendolo composto* ogni corpo che può oscillare intorno ad un punto di sospensione. Prendiamo ad esempio una spranga parallelepipeda di metallo AB (*fig.*45) mobile intorno all'asse orizzontale c, giacente in un piano verticale condotto pel centro di gravità della spranga; e consideriamo due molecole m ed n che si trovano in questo piano di simmetria a diverse distanze dall'asse di rotazione. È chiaro per le cose anzidette che se la spranga AB si riducesse alla sola molecola m sospesa ad un filo della lunghezza cm, che chiamiamo r, la durata della sua oscillazione per un arco infinitesimo sarebbe $\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$; e similmente per la molecola n distante dall'asse di rotazione di $cn = r'$ si avrebbe la durata $\pi\sqrt{\frac{r'}{g}}$, maggiore della prima. E poichè le due molecole sono congiunte ad un medesimo sistema, e quindi debbono compiere le loro oscillazioni nello stesso tempo; così è d'uopo pel sincronismo dei movimenti che m rallenti un poco la celerità della sua oscillazione, ed n l'aumenti. Ed in generale l'unità del sistema obbligherà le molecole prossime all'asse di rotazione a diminuire la celerità di oscillazione, aumentandola al contrario per quelle che ne sono più lontane. Vi sarà dunque necessariamente una distanza co dall'asse di sospensione, per la quale le molecole della spranga non saranno nè rallentate nè accelerate per la loro connessione alle altre molecole del sistema; ed un pendolo semplice, che avesse la lunghezza co, sarebbe in conseguenza sincrono al pendolo composto AB. Il punto che in un corpo oscillante gode di questa proprietà ha ricevuto il nome di *centro di oscillazione*, e la meccanica razionale sa determinarne la distanza dall'asse di rota-

zione in funzione della massa, densità e forma delle diverse parti da cui risulta un pendolo composto [1].

Quanto più la forma del pendolo composto si approssima alla definizione del pendolo semplice, tanto più piccole ed in conseguenza meno influenti saranno le correzioni da farsi per dedurre dai dati del primo la lunghezza del secondo. Questo pregio caratterizza il pendolo costruito da Borda. Esso è formato da una palla di platino *a* (*fig.* 51) sospesa ad un filo metallico *m* per mezzo della calotta *cc*, la quale resta unita alla palla per semplice adesione coadiuvata dall'interposizione di un sottilissimo strato di sostanza grassa. L'estremità superiore del filo è fermata ad un apparecchio di sospensione che porta un prisma triangolare di acciaio *b*, o *coltello di sospensione*, il quale col suo spigolo acuminato poggia sopra due piani ben levigati di pietra dura rappresentati in profilo da *df*. La palla di platino, che sotto un piccolo volume contiene molta massa, soffre piccola perdita di velocità per la resistenza dell'aria, ed il coltello di acciaio incontra debole attrito su piani di pietra dura ben levigati; e restando così grandemente attenuate le due resistenze che bentosto riducono un pendolo al riposo, la palla di platino una volta messa in movimento, potrà continuare le sue oscillazioni per molte ore consecutive.

Per diminuire il numero delle correzioni necessarie a farsi perchè dalla lunghezza del pendolo, che descriviamo, si possa dedurre quella del pendolo semplice che gli sarebbe sincrono, è d'uopo che l'apparecchio di sospensione non influisca sulla celerità di oscillazione della palla. Ciò si ottiene primieramente col dare tali proporzioni alle parti di questo apparecchio che il centro di gravità si trovi vicinissimo all'asse di rotazione; indi coll'innalzare ed abbassare la testa *k* si regoleranno le oscillazioni del solo apparecchio di sospensione, in modo che vadano di accordo con quelle di un buon orologio a secondi; poi si sospenderà la palla, e modificando la lunghezza del filo si farà sì che le oscillazioni del-

[1] Nella nota (E) alla fine del volume si troverà la formola data da Biot per calcolare la lunghezza del pendolo semplice sincrono al pendolo di Borda.

l'intero pendolo eguaglino quelle che faceva il solo apparecchio di sospensione, ed allora la sua massa è come se non esistesse, non prendendo essa alcuna parte alla celerità di oscillazione del pendolo. Ed in fatti Borda, che primieramente ha proposto questo metodo, ha osservato che la durata di oscillazione per una stessa lunghezza del pendolo è indipendente dalla massa dell'apparecchio di sospensione.

Le leggi delle oscillazioni dei pendoli suppongono, come abbiamo osservato precedentemente che esse si compiano in archi infinitamente piccoli; e poichè le osservazioni non possono cadere che sopra quantità finite, così abbiamo esposto la formola

$$t = \theta\left(1 + \frac{1}{4} sen^2 \frac{1}{2} \varphi\right),$$

la quale ci dà θ in funzione di t. Ma quest'ultimo valore non potendosi ottenere con sufficiente esattezza da un'osservazione diretta lo avremo dal quoziente $\frac{T}{N}$, in cui N dinota il numero delle oscillazioni eseguite durante il tempo T. Similmente avremo $\theta = \frac{T}{N'}$, N′ indicando il numero delle oscillazioni per un arco infinitesimo. Sostituendo questi valori di t e θ nell'equazione precedente, si avrà

$$N' = N\left(1 + \frac{1}{4} sen^2 \frac{1}{2} \varphi\right),$$

per mezzo della quale, si avrà N′ da N, e quindi θ.

È d'uopo inoltre osservare che il valore di φ va continuamente decrescendo durante l'esperienza. Chiamando φ' il valore dell'arco nel principio dell'esperienza, e φ'' ciò che diviene al termine di essa, potremo supporre, quando T non sia troppo grande, che l'oscillazione fosse avvenuta per un arco costante, eguale alla media aritmetica $\frac{\varphi'+\varphi''}{2}$. Allora avremo

$$N' = N\left(1 + \frac{1}{4}.\ sen^2\ \frac{\varphi'+\varphi''}{4}\right).$$

Ma se T è troppo grande bisognerà usare la formola data da Borda

$$N' = N \left[1 + \frac{sen(\varphi' - \varphi'')\, sen(\varphi' + \varphi'')}{32\, M \log \left(\frac{sen\, \varphi'}{sen\, \varphi''} \right)} \right],$$ [1]

facendo $M = 2{,}30258509$, vale a dire eguale all'unità divisa pel modulo col quale i logaritmi neperiani si trasformano in quelli di Briggs.

Finalmente ad N si dovranno fare tre altre correzioni, la prima relativa alla temperatura pel pendolo, la seconda rispetto all'altezza del luogo di osservazione sul livello del mare, e la terza per la riduzione al vôto. Poichè il calore dilata i corpi, la lunghezza del pendolo, e quindi la durata di un'oscillazione dovrà variare col grado di temperatura. Perciò le sperienze non saranno comparabili, finchè per mezzo del calcolo non siano ridotte ad una temperatura normale; e la teorica dei *coefficienti di dilatazione*, ch'esporremo nel 3° libro, ci dichiarerà la possibilità di questo calcolo.

Rispetto alla 2ª correzione è d'uopo premettere che la gravità agisce (come appresso dimostreremo) nella ragione inversa dei quadrati delle distanze dal centro della terra. In conseguenza chiamando a il raggio terrestre ed h l'altezza del punto di stazione sul livello del mare, la forza g' di gravità per questo livello ci sarà data dall'equazione

$$g' = g \frac{(a+h)^2}{a^2}.$$

E sostituendo nella formola $\frac{T}{N} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ una volta N e g corrispondenti al punto di stazione, ed un'altra volta N' e g' corrispondenti al livello del mare, avremo

$$N' = \frac{N(a+h)}{a}$$

[1] La dimostrazione di questa formola è data da Biot nella sua opera: *Astronomie physique — 3e édition — tom. II. pag. 447.*

Circa la 3ª correzione la mecanica razionale dimostra [1] che nell'ipotesi di piccole escursioni se la resistenza dell'aria allunga la durata della semi-oscillazione discendente di altrettanto abbrevia quella della semi-oscillazione ascendente; dimodochè quanto alla resistenza al moto la durata di un'oscillazione è la stessa nell'aria e nel vôto [2]. Ma, come vedremo nell' AEROSTATICA, la palla di platino perde nell'aria una quantità di peso eguale a quello del volume fluido discacciato; e chiamando p il peso della palla e δ il rapporto tra la densità dell'aria e quella del platino, il peso della palla nell'aria sarà $p\ (1 - \delta)$, e la gravità di ciascuna molecola di platino sarà diminuita nel rapporto di $1 - \delta : 1$. Quindi denominando N′ ed N i numeri di oscillazione prodotte dalle forze g e $g\ (1 - \delta)$, avremo sostituendoli nella nota formola

$$\frac{T}{N} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}},$$

$$N' = N \sqrt{1 - \delta}. \text{ [3]}$$

38. Il primo fatto, che abbia dimostrato la gravità variare secondo la latitudine del luogo, è stato osservato dall'astronomo francese Richer nel 1672 nell'isola di Cayenna sulla costa orientale dell'America a 5° di latitudine boreale. Lo stesso pendolo che a Parigi batteva i secondi, a Cayenna ritardava di 2′,28″ al giorno; e poichè la lunghezza del pendolo non era variata, la forza di gravità aveva dovuto necessariamente diminuire per produrre un aumento nella durata di oscillazione.

In questo fenomeno, che destò meraviglia in tutti i fisici di

[1] Vedi — *Traité de Mécanique par S. D. Poisson — tom. II. 2e édition — n.° 191 e 399.*

[2] Meno la piccola differenza osservata nelle sperienze di Bessel e dichiarata dalle ricerche teoretiche di Poisson.

[3] I limiti di un trattato elementare di Fisica non ci permettono di entrare in tutti i particolari della rivelantissima esperienza del pendolo. Il lettore che desiderasse ulteriori schiarimenti, li troverà nel 2.° tomo dell'*Astronomia Fisica* di Biot, ed in una memoria di Borda pubblicata da Délambre nel 3° tomo dell'opera: *Base du système métrique décimal.*

quel tempo, Huyghens vide un effetto del movimento di rotazione della terra intorno al suo asse. Ed in vero, immaginiamo che una massa A (*fig.* 47) priva di qualsivoglia forza, e fermata al punto C per mezzo del filo AC, riceva una spinta secondo la retta AB. La tenacità del filo opponendosi al moto progressivo lungo la retta AB, obbligherà la massa A a moversi in giro per la circonferenza ADK; e poichè in ogni punto di questa curva dovrà restare distrutta la tendenza del mobile a sfuggire per la tangente a quel dato punto; così il filo si troverà in uno stato di tensione continua. Quindi se togliamo di mezzo il filo, ed alla sua tensione sostituiamo una forza eguale, che spingesse continuamente la massa A verso il centro C, il movimento si effettuirebbe allo stesso modo; ed il cerchio verrebbe allora descritto per l'azione congiunta della velocità impressa al mobile secondo la retta AB, e della forza sostituita alla tensione del filo, e che chiameremo *centripeta*, perchè diretta verso il centro del movimento. E poichè questa forza centripeta deve continuamente equilibrare la tendenza del mobile a sfuggire per la tangente al punto che occupa sulla circonferenza, il suo valore può servire di misura a questa tendenza di allontanarsi continuamente dal centro di movimento, e che per ciò si è chiamata forza *centrifuga*. In virtù di questa forza la pietra menata in giro da una fionda, non cade verso la terra, quando si trova al punto culminante della curva che descrive; e per essa si spiegano molti fenomeni che avvengono nei movimenti di rotazione.

Ciò posto, se durante il tempo che la massa A ha impiegato nel percorrere l'arco AD, la forza di projezione per la AB non avesse agito, il mobile per l'azione della sola forza centripeta avrebbe descritto la retta AE, senoverso dell'arco AD. E se quest'arco è così piccolo da potergli sostituire senza errore sensibile la sua corda, avremo per un noto teorema di Geometria

$$AE = \frac{AD^2}{2r},$$

r dinotando il raggio del cerchio. D'altronde nella funzione $g = \frac{2s}{t^2}$ (n° 26), che può rappresentare ogni forza continua co-

stante o variabile purchè s e t siano quantità infinitesime, sostituendo a g la forza centripeta α, ed allo spazio s la retta AE, avremo

$$\alpha = \frac{AD^2}{rt^2}.$$

Ma la Meccanica razionale dimostra che se un corpo percorre una circonferenza sotto l' azione di una forza centripeta, deve descriverla con moto uniforme; quindi se chiamiamo a l'arco descritto nell'unità di tempo, l'arco AD descritto nel tempo t sarà espresso da at. Sostituendo questo valore di AD in quello di α, avremo

$$\alpha = \frac{a^2}{r}.$$

Quindi comprendiamo perchè movendo in giro un corpo sospeso ad un filo, coll'aumentare la celerità di rotazione perveniamo talvolta a spezzare il filo.

Inoltre essendo a l'arco descritto nell'unità di tempo, esso rappresenterà la celerità del movimento, ed in conseguenza sarà eguale al quoziente dello spazio diviso pel tempo. Per ciò chiamando T il tempo di una intera rivoluzione, ed r il raggio del cerchio, sarà $a = \frac{2\pi r}{T}$; e quindi

$$\alpha = \frac{4\pi^2 r}{T^2} ;$$

vale a dire che la forza centrifuga è inversamente proporzionale al quadrato del tempo, e direttamente proporzionale al raggio del cerchio descritto dal mobile.

39. Applichiamo ora questi principî meccanici al movimento di rotazione della terra. Rappresenti NS (*fig.* 48) l'asse di rotazione della terra, ed AB il diametro dell'equatore. Qualunque punto A della linea equinoziale percorrerà in un giorno siderale [1] la

[1] Gli astronomi distinguono tre unità di tempo; *giorno siderale*, *giorno solare vero*, *giorno solare medio*. Il giorno siderale è il tempo che intercede a due ritorni consecutivi di una stella al medesimo meridiano, corretto però questo tempo di talune piccole variazioni, di cui qui non possiamo occuparci. Il sole, che apparisce con un movimento proprio da occidente in oriente, per tornare ad un medesimo meridiano deve necessariamente impiegare un tempo

circonferenza di cerchio che ha per raggio Ao; e nel tempo stesso un altro punto m sotto la latitudine Am descriverà la circonferenza di un paralello, che ha per raggio $mp = r\cos\gamma$, r indicando il raggio della terra e γ la latitudine. Sostituendo $r\cos\gamma$ ad r nella formola precedente, avremo

$$\alpha = \frac{4\pi^2 r\cos\gamma}{T^2}$$

e poichè T è costante per tutti i paralelli, la forza centrifuga sarà proporzionale al coseno della latitudine; quindi massima all'equatore, ove $\cos\gamma = 1$, nulla ai poli pei quali abbiamo $\cos\gamma = 0$. Basta dunque avere il valore assoluto di questa forza all'equatore, per determinarne l'intensità ad una latitudine qualunque. Essendo per l'equatore $\cos\gamma = 1$, $r = 6378481$ metri avremo ponendo $T = 86164''$,

$$\alpha = 0^m,0339175.$$

Dunque la forza centrifuga all'equatore comunica ai corpi, in direzione opposta alla gravità ed in un minuto secondo di azione, la velocità di circa 34 millimetri. Quindi per ottenere il rapporto di questa forza alla gravità relativamente all'equatore, bisogna conoscere la velocità che un grave ivi acquisterebbe scendendo per 1'' nel vôto. Or la lunghezza media del pendolo che batterebbe i secondi all'equatore è $991^{mm},027$: questo valore sostituito nell'equazione $g = \pi^2 r$ (*pag.* 64) dà

$$g = 9^m,7810302\ ;$$

e comparando a questo numero il valore della forza centrifuga $\alpha = 0^m,0339175$, si ha prossimamente il rapporto

$$\frac{1}{289} = \frac{1}{(17)^2}\ .$$

maggiore del giorno siderale, e questo tempo costituisce il giorno solare vero; ma poichè il movimento proprio del sole non è uniforme, l'eccesso del giorno solare sul siderale non è costante; e prendendo una media aritmetica di tutte le differenze per la durata di un anno, si ha il giorno solare medio. Traducendo queste leggi fenomenali nel fatto reale di un doppio movimento della terra, è facile comprendere che il tempo della sua rivoluzione diurna è dato dalla durata del giorno siderale.

Quindi se la rivoluzione diurna della terra si compisse in un tempo 17 volte minore, vale a dire in $1^{\circ},24',28''$, la forza centrifuga che sappiamo essere inversamente proporzionale al quadrato del tempo, diverrebbe 289 maggiore; ed i corpi all'equatore non avrebbero peso, poichè spinti lungo il raggio terrestre da una forza eguale ed opposta alla gravità.

Sotto i paralelli all'equatore la forza centrifuga, giacendo nel piano del cerchio di rotazione, farà un angolo colla direzione della gravità, e soltanto una parte di essa si opporrà all'effetto di quest'ultima forza. Prendiamo ad esempio il punto *m* (*fig.* 48) posto sul paralello, la cui latitudine $Am = \gamma$: la forza centrifuga che gli compete essendo $\frac{4\pi^2 r \cos\gamma}{T^2}$ e diretta secondo *pm*, la sua componente secondo *om* sarà

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2}\cos^2\gamma = \frac{4\pi^2 r}{T^2}(1 - \operatorname{sen}^2\gamma) = \frac{4\pi^2 r}{T^2} - \frac{4\pi^2 r}{T^2}\operatorname{sen}^2\gamma.$$

Dunque la diminuzione che la forza centrifuga apporta alla gravità è proporzionale al quadrato del coseno della latitudine; e poichè il primo termine dell'ultima differenza rappresenta la quantità della forza centrifuga all'equatore segue che le variazioni della componente della forza centrifuga secondo il raggio terrestre sono proporzionali al quadrato del seno della latitudine.

40. Non solo Huyghens diede un'esatta spiegazione del fenomeno osservato da Richer a Cayenna, ma dalla serie delle sue riflessioni fu condotto a dover riguardare la terra di una forma non esattamente sferica, ma come una sferoide depressa ai popoli e sollevata all'equatore. Immaginiamo, egli diceva, un canale AOS (*fig.* 49) che scendendo lungo il raggio terrestre AO nel piano dell'equatore, volgesse poi in OS secondo l'asse di rotazione NS. È chiaro che il liquido contenuto nel braccio OS conserva tutta la forza del suo peso, mentre le particelle del liquido contenuto in AO ricevono dall'azione della forza centrifuga una diminuzione di peso tanto più grande per quanto è maggiore la loro distanza dal centro O. Dunque le due colonne liquide AO ed OS dovendo per

legge di equilibrio essere egualmente pesanti dovranno necessariamente esser diseguali ed AO dovrà essere la più lunga. Huyghens supponeva che il peso di un corpo fosse lo stesso a qualunque profondità s'immaginasse situato; e dietro questa ipotesi egli trovava che i due semi-diametri AO ed OS dovevano essere nel rapporto di 578 a 577, dimodochè la depressione polare sarebbe rappresentata da $\frac{1}{578}$ del diametro equatoriale.

Quasi contemporaneamente Newton deduceva dalle sue idee teoretiche sulla gravitazione universale la necessità di una depressione polare nel nostro pianeta, come conseguenza dell'attrazione terrestre modificata dall'azione della forza centrifuga. E poichè il suo sistema gli faceva riguardare il peso di uu corpo, come dipendente dalla distanza che lo separa dal centro terrestre, così doveva ottenere dai suoi calcoli un valore diverso per la depressione polare, la quale trovò egale a $\frac{1}{230}$ del diametro equatoriale.

Conseguenza immediata di queste idee teoriche era la diseguaglianza dei gradi del meridiano terrestre, e la necessità di misurarne parecchi per ottenerne un valore medio. Per ordine del governo francese Cassini e Lahire misurarono l'arco del meridiano compreso tra Dunkerque e Callioure; e persuasi da un falso principio geometrico [1] che se la terra fosse depressa ai poli e sollevata

[1] Per dividere la curva ellittica in archi corrispondenti ad eguali valori angolari, essi descrivevano un cerchio concentrico all'ellissi: e divisane la circonferenza in gradi, conducevano pel centro e pei punti di divisione delle rette fino all'incontro della curva ellittica. Così facendo trovavano in vicinanza dell'asse maggiore dell'ellissi archi più grandi di quelli che stavano prossimi all'asse minore; donde conchiudevano che la depressione polare dando al meridiano terrestre la forma ellittica, i gradi vicini al polo dovevano essere minori di quelli prossimi all'equatore. E quando poi i geometri fecero avvertire che i raggi del cerchio concentrico all'ellissi non sono normali a questa curva, e che i gradi del meridiano ellittico sono gli stessi di quelli del circolo osculatore al punto che si considera; allora i geodeti del tempo furono obbligati di ammettere la conseguenza opposta, vale a dire che la terra avessè la forma di un'elissoide allungata ai poli e depressa all'equatore; poichè se i gradi polari del meridiano erano minori degli equatoriali, il circolo osculatore dei primi doveva es-

all'equatore, i gradi del meridiano terrestre dovrebbero avere una lunghezza decrescente dall'equatore ai poli, essi trovarono i gradi verso il nord alquanto minori di quelli situati al sud. Quindi appena i geometri ebbero dichiarata la falsità dell'assunto principio, divenne necessaria l'illazione opposta, e per quarant'anni non ostante i calcoli di Huyghens e Newton i dotti francesi opinarono che la terra fosse una sferoide allungata verso i poli. Ma nuove misure più tardi eseguite da altri astronomi francesi nel Perou ed in Lapponia rettificarono le idee sulla forma della terra; Cassini conobbe l'errore dei suoi calcoli; e le operazioni geodetiche confermarono col fatto della misura il principio teorico della depressione polare.

Ammessa l'idea, d'altronde sostenuta dall'insieme delle osservazioni geologiche, che la terra sia stata fluida in origine, e posto il principio newtoniano (che dimostreremo nel capo seguente) che tutte le molecole della materia si gravitano a vicenda in ragione inversa dei quadrati delle distanze, la Meccanica razionale ne ha dedotto che la terra debba essere un'ellissoide di rivoluzione. Or la teorica di questo solido dimostra che chiamando A il semi-diametro equatoriale, R il raggio corrispondente alla latitudine λ, $\frac{1}{p}$ la depressione polare, si ha trascurando i termini che contengono le potenze di $\frac{1}{p}$ superiori alla 1^a,

$$R = A\left(1 - \frac{1}{p}\,sen^2\lambda\right).$$ [1]

Ma la teoria newotoniana stabilisce che la gravità sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro della terra; dunque chiamando G la gravità all'equatore, G′ alla latitudine λ, avremo

$$G : G' = A^2\left(1 - \frac{1}{p}\,sen^2\lambda\right)^2 : A^2,$$

sere minore di quello dei secondi, e quindi il meridiano più inflesso ai poli che all'equatore.

[1] Francoeur — *Géodésie* n° 182.

donde

$$G' = \frac{G}{\left(1 - \frac{1}{p}\,sen^2\lambda\right)^2} = G\left(1 + \frac{2}{p}\,sen^2\lambda\right),$$

Or le intensità G e G′ sono eguali alle velocità g e g' dei gravi alle stesse latitudini, aumentate delle corrispondenti forze centrifughe f ed $f\,(1 - sen^2\lambda)$. Possiamo dunque a G e G′ sostituire $g + f$, e $g' + f\,(1 - sen^2\lambda)$; avremo così

$$g' + f\,(1 - sen^2\lambda) = (g + f)\,(1 + \frac{2}{p}\,sen^2\lambda),$$

la quale equazione, riducendo i termini e facendo

$$\frac{2g}{p} + f\left(\frac{2}{p} + 1\right) = k, \text{ diviene}$$

$$g' = g + k\,sen^2\lambda;$$

vale a dire che la se terra è un'ellissoide omogenea di rivoluzione la gravità deve variare proporzionatamente al quadrato del seno della latitudine.

Or da un lato la densità media della terra, della cui ricerca faremo parola nel capo seguente, comparata a quella delle sostanze che ne formano la crosta, non ci permette riguardare il nostro pianeta come una massa fisicamente omogenea; e da un altro se le misure geodetiche hanno dichiarato che la terra non è sferica, hanno ancora dimostrato ch'essa neppure è un'ellissoide di rivoluzione. In conseguenza la determinazione teoretica del coefficiente k è impossibile, e non ci resta che la possibilità di averne un valore empirico, rappresentato dalla media aritmetica di un gran numero di osservazioni eseguite col pendolo; essendo noto che la sua lunghezza per una durata costante di oscillazione è proporzionale al valore della gravità. E perciò chiamandolo l la lunghezza

del pendolo che batte i secondi alla latitudine λ, l^o la sua lunghezza all'equatore, porremo l'equazione

$$l = l^o + D sen^2\lambda ,$$

da cui si ottiene D, quando l'osservazione ha dato l, l^o e λ

Dopo la prima determinazione di l fatta da Borda a Parigi sul finire dello scorso secolo, e dalla quale si è ottenuto $l = 993^{mm}$, 846147, dondo $g = 9^m$, 808764, parecchie ne sono state eseguite in diversi punti del globo. Ed attesa la dipendenza preveduta dalla teorica tra il valore di l e la costituzione geologica della contrada, ove si fissa il punto di osservazione; l'esperimento non solo ha dato valori di D diversi secondo la latitudine della stazione, ma varî eziandio per luoghi posti su lo stesso paralello. Dimodochè non resta altro mezzo esatto per ottenere il valore della gravità per un dato luogo che un'esplorazione diretta per mezzo del pendolo [1].

[1] Il lettore potrà consultare con vantaggio una dotta e giudiziosa memoria di Biot, la quale ha per titolo — *Dissertation sur les mesures du pendule effectuees en differentes regions de la Terre*, e che si trova alla fine del 2° tomo della sua — *Astronomie physique 3e edition.*

CAPO QUINTO.

Sistema della gravitazione universale.

> D'autres présenteront sous un point de vue plus général et plus simple les théories exposés dans le livre des Principes, et toutes les verités qu'il a fait éclore; mais il restera comme monument de la profondeur du génie qui nous a révélé la plus grande loi de l'univers.
>
> LAPLACE. — *Exposition du système du monde.*

41. L'idea che i corpi celesti tendano gli uni verso degli altri, come i gravi verso la terra, risale fino ad Anassagora, il il quale insegnava che le stelle ed i pianeti sono corpi pesanti, la cui caduta è impedita dal loro movimento circolare; e che se questo venisse a mancare, essi cadrebbero immediatamente: pensiero sublime, che sorto in un tempo nel quale non esisteva neppur l'idea di meccanica razionale, rivela la profondità dell'intelletto che lo concepiva. È noto ancora che sul peso degli atomi poggiavano le cosmogonie di Democrito ed Epicuro. E quando, dopo il risorgimento delle scienze, Copernico completò l'idea pitagorica sul vero ordinamento del sistema planetario, egli comprese ancora essere la gravità una forza ínsita agli atomi della materia, e cagione della rotondità dei pianeti. « Veramente, egli dice *(De Revolut. orbium coelest.)* io stimo la gravità non esser altro che una certa naturale appetenza imposta alle parti dalla divina provvidenza del Fattore dell'universo, affinchè facciano un tutto riunendosi in forma di globo. Ed è da credersi che la stessa affezione sia nel sole, nella luna, ed in tutti gli altri pianeti e che per essa si conservino sotto quella rotondità con cui ci appariscono ».

Keppler spinse più innanzi le sue vedute. « La gravità, egli

« dice *(De stella Martis)*, non è che un'affezione materiale e « mutua dei corpi, per la quale essi tendono di unirsi ».

« La gravità dei corpi non è diretta verso il centro del mondo, ma verso quello del corpo rotondo di cui fanno parte; e se la terra non fosse sferica, i gravi situati nei diversi punti della sua superficie, non cadrebbero affatto verso un medesimo centro ».

« Due corpi isolati si porterebbero l'uno verso l'altro, come due calamite, percorrendo, per unirsi, degli spazi reciprocamente proporzionali alle loro masse. Se la terra e la luna non fossero rattenute nella distanza, che le separa, da una forza animale o da altra equivalente, esse cadrebbero l'una sull' altra; e nell' ipotesi che siano egualmente dense, la luna farebbe i $\frac{53}{54}$ del cammino, ed il resto sarebbe percorso dalla terra ».

« Se la terra cessasse di attrarre le acque dell'oceano, queste si porterebbero sulla luna in virtù della forza attrattiva di questo astro. Questa forza che si estende fino alla terra, vi produce il fenomeno del flusso e riflusso del mare ».

Più tardi Fermat dal considerare la gravità come effetto di attrazione molecolare, dedusse che se i gravi si dirigono verso il centro terrestre, ciò avviene perchè essi seguono per quanto è possibile, la tendenza che hanno verso tutte le parti della terra. E dallo stesso principio egli deduceva che nell'interno del nostro pianeta il peso di un corpo deve diminuire in ragione che decresce la sua distanza dal centro; poichè le parti che più distano da questo punto debbono attrarlo in senso contrario delle più vicine.

42. Insino a questo punto la storia non ci presenta che semplici divinazioni di un sistema di gravitazione universale; senza che questo principio si facesse intervenire come elemento della cagione produttrice dei movimenti planetari. La prima opera in cui si trovi dichiarata un'idea di relazione tra i movimenti dei pianeti e la loro gravità sì verso il sole che tra essi medesimi, fu quella pubblicata dall'astronomo inglese Hook sot-

to il titolo: *An attempt to prove the motion of the earth.* In quest'opera si leggono le seguenti rimarchevoli proposizioni.

« Io spiegherò un sistema del mondo sotto molti riguardi differente da tutti gli altri, ed il quale è fondato sulle tre seguenti proposizioni — 1ª. Che tutti i corpi celesti hanno non solamente un'attrazione o una gravitazione sul loro centro, ma che essi si attirano a vicenda nella loro sfera di attività — 2ª. Che tutti i corpi i quali hanno un movimento semplice e diretto, continuerebbero a moversi in linea retta, se qualche altra forza non li deviasse continuamente e non li obbligasse a descrivere un cerchio, un'ellissi o altra curva più composta — 3ª. Che l'attrazione è tanto più intensa, per quanto il corpo attirante è più vicino ».

Riguardo alla diminuzione della gravità in ragion della distanza dal centro attraente, Hook diceva richieder essa meditazione e ricerche speciali, a cui egli non aveva potuto darsi; ma che la sua idea meritava di esser seguita, e che grande utilità ne avrebbero tratta gli astronomi.

In questo stato era la scienza cosmica, quando nel 1684, tredici anni dopo la pubblicazione del saggio di Hook, apparve per la prima volta l'immortale opera di Newton: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* E quantunque Pimberton, biografo di Newton, assicurasse che questo grand'uomo fin dal 1666 aveva scoverto la legge della gravitazione, purtuttavia dalla brevissima esposizione, che ci concedono i limiti di un trattato elementare di Fisica, si rileverà che il saggio di Hook non avrebbe potuto essere tutto al più che un'occasione all'immenso problema risoluto nel libro dei Principî.

43º. Gli astronomi antichi erano sì certi che la semplicità e perfezione della Natura avesse dovuto corrispondere esattamente alle lore chimeriche idee, che anteriormente ad ogni dato di osservazione posero per principio che i pianeti dovessero descrivere orbite circolari e con movimento uniforme. Keppler si affaticò inutilmente per rappresentare secondo questa veduta il movimento di Marte, e dopo varî tentativi, i cui particolari egli ha riferito

nella sua opera *De stella Martis*, conobbe in fine che questo pianeta si muove in un' ellissi di cui il sole occupa uno dei fuochi: risultamento che le sue ulteriori osservazioni estesero non solo a tutti gli altri pianeti, ma eziandio ai loro satelliti. E continuando le sue ricerche, egli scovrì ancora che immaginando un raggio vettore dal centro di un pianeta a quello del sole, o dal centro di un satellite a quello del pianeta principale, la quantità di area che il raggio vettore descrive seguendo l'astro nel suo corso, è proporzionale al tempo del movimento; dimodochè se dopo eguali intervalli di tempo il pianeta occupa i luoghi *m*,*n*, *t* (*fig.* 53) le aree *msn*,*nst* ec, saranno equivalenti tra loro.

Il principio di un'armonia numerica tra i fenomeni naturali, si altamente proclamato dalla scuola pitagorica, accolto con entusiasmo dall'ardente immaginazione di Keppler, diede occasione alla sua più bella scoverta nel sistema planetario. Persuaso che le distanze medie dei pianeti dal sole e le durate delle loro rivoluzioni fossero ligate da qualche numerica analogia, egli le comparò coi poliedri della geometria e coll'intervallo dei suoni, senza ottenerne verun risultamento. Ma dopo 17 anni di queste infruttuose ricerche un'ispirazione felice lo condusse a comparare i quadrati dei tempi periodici delle rivoluzioni planetarie ai cubi dei loro assi maggiori, e vi rinvenne un'esatta proporzione.

Con queste tre cardinali scoverte, conosciute sotto il nome di *leggi di Keppler*, ebbe origine l'astronomia geometrica, vale a dire la possibilità di calcolare la posizione di un pianeta nello spazio ad un istante qualunque del tempo. Ma l'idea di movimento essendo inseparabile da quella di forza motrice, lo spirito umano non poteva appagarsi della sola cognizione di leggi fenomenali: egli doveva naturalmente cercarne le cagioni. Or il primo tentativo, che siasi fatto, per coordinare i movimenti planetarî alle leggi meccaniche che reggono i movimenti dei corpi terrestri, fu l'ipotesi dei vortici di Descartes; ma dapprima puramente arbitraria, indi contraddetta dai fenomeni stessi ch'essa era destinata a comporre in un sistema scientifico, l'ipotesi di Descartes finì col solo merito di aver rivelata la possibilità di una Meccanica ce-

leste, quando tale idea non era ancora sorta nella mente degli astronomi [1]. Il solo Hook aveva chiaramente compreso che i movimenti planetarî risultano dall'azione congiunta di una forza primitiva di projezione e di un'altra di attrazione verso il sole; ma il suo pensiero non oltrepassò i limiti di una pura divinazione. Il vero fondatore della Meccanica celeste fu Newton.

E prima di accedere all'enunciato dell'immenso problema risoluto da questo grande geometra, è d'uopo premettere ciò che costituisce propriamente un *sistema*, e per quali caratteri esso differisce da una *teoria*.

Il *sistema*, che etimologicamente vuol dire *costruzione*, è un principio essenzialmente sintetico. La sua genesi sta in un concetto dello spirito, anteriore al fatto, o che da questo non toglie tutto al più che una semplice occasione; quindi la sua realtà, lungi dal presentarsi al pensiero come una necessità logica, si offre in vece come un problema da risolversi. I fisici, prima che avessero avuto strumenti idonei a misurare esattamente un angolo, stabilirono il principio che la luce riflettendosi sulla superficie di uno specchio forma l'angolo di riflessione eguale a quello d'incidenza; e ad un esperimento che difficilmente può guarentire l'esattezza di una misura angolare tra i limiti di un grado, Descartes appoggiò la legge della rifrazione dei raggi luminosi. Questi principî, che diverrebbero inutili alla Fisica, se il pensiero potesse riguardarli privi di precisione geometrica, sono di loro natura sistematici; e la loro realtà ha bisogno di una dimostrazione, che a suo luogo faremo conoscere.

[1] Prima di Descartes i fisici erano così lontani dal concepire la possibilità di una Meccanica celeste, che seguendo le idee aristoteliche distinguevano due specie di movimento, *circolare* e *rettilineo*: riguardavano il primo quale effetto della natura dei corpi, il secondo di una forza impellente. Così il moto circolare (come allora si credeva) dei pianeti era un effetto della stessa loro natura, e la pietra lanciata in linea retta, era dalla forza d'impulso obbligata a muoversi contro la sua naturale tendenza — A ragione dunque si è detto, che se Descartes si è ingannato sulle leggi del moto, almeno è stato il primo a divinare che il moto deve avere delle leggi.

Al contrario la *teoria*, che vuol dire *veduta*, è essenzialmente analitica. Lo spirito ne forma l'idea, *vedendo* in una quantità di fenomeni il solo fatto comune ch'essi presentano. *Ogni corpo è grave, ogni corpo è poroso, ogni corpo è dilatabile dall'azione del calore*, ec. Sono principî teoretici, perchè ottenuti per induzione. La loro genesi ne guarentisce la realtà; e se lo spirito può dubitarne, ciò non può avvenire che rispetto all'estensione dell'idea, e giammai riguardo alla comprensione. Che l'argilla, per esempio, messa al fuoco si ristringa in vece di dilatarsi, ciò nulla toglie alla realtà del concetto che ci fa riguardare i corpi come dilatabili per l'azione del calore; ma soltanto ci avverte che nell'espressione *tutti i corpi sono dilatabili dal calore* la parola *tutti* non deve prendersi in un senso rigorosamente assoluto.

Premesse queste idee, veniamo all'esposizione dei principî fondamentali del sistema di Newton — Egli ha dimotrato

— 1°. *Che ogni corpo, il quale si move in una curva piana, e che condotto un raggio ad un punto sia immobile sia che si mova uniformemente in linea retta, descriva arce proporzionali ai tempi; sarà animato da una forza centripeta verso quel punto* — Or dalla 1ª legge di Keppler abbiamo che i pianeti intorno al centro del sole, ed i satelliti intorno ai centri dei pianeti a cui appartengono, descrivono arce proporzionali ai tempi; dunque i pianeti gravitano verso il sole, ed i satelliti verso i loro pianeti. Questo teorema fondamentale è stato dimostrato da Newton in un modo semplice ed elegante. Siano ab, bc, cd, ec. (*fig.* 52) gli elementi successivi e percorsi in tempi eguali della curva piana descritta da un corpo in modo che condotte al punto S le rette aS, bS, cS, dS, ec. le aree aSb, bSc, cSd siano equivalenti tra loro. Se al terminare dell'archetto infinitesimo ab, il corpo non ricevesse nuovo impulso, descriverebbe in un tempo eguale al primo la retta $be = ab$ e nella stessa direzione; e per ciò eguali sarebbero i due triangoli aSb bSe. Ma per ipotesi il triangolo $bSc = aSb$; dunque il triangolo $bSc = bSe$; e per ciò ce paralella a bS. Quindi fatta $bh = ce$, sarà $bhce$ un parallelogrammo, e bc risultante di be e bh. Dunque la forza che in b devia il corpo dalla direzio-

ne *be*, è diretta verso il punto S. Similmente si dimostra che la *ck* diretta verso lo stesso punto S devia il mobile dal cammino *cf*, e così di seguito.

— 2°. *Che un corpo movendosi in un'ellissi e descrivendo rispetto ad uno dei fuochi aree proporzionali ai tempi, la sua tendenza verso quel fuoco sarà inversamente proporzionale al quadrato della distanza.* E reciprocamente, *se un corpo sia animato da una forza d'impulso e da una tendenza ad un punto inversamente proporzionale al quadrato della distanza, esso descriverà in generale una sezione conica di cui quel punto sarà fuoco; e la sezione conica sarà un'ellissi, una parabola o un'iperbola, secondo la varia posizione e velocità che il corpo aveva all'origine del movimento.* — Ma i pianeti intorno al sole ed i satelliti intorno ai loro pianeti descrivono in orbite ellittiche aree proporzionali ai tempi rispetto ad uno dei fuochi, occupato dal centro del sole nel 1° caso e dal centro del pianeta nel 2°; dunque la tendenza verso questi centri è inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

—3°. Che data la legge di Keppler sul rapporto dei tempi periodici agli assi maggiori delle orbite planetarie, segue che se tutti i pianeti fossero portati ad una medesima distanza dal sole, essi vi cadrebbero tutti colla stessa velocità. Essi dunque tendono verso il sole con una forza proporzionale alla loro massa.

Le osservazioni hanno dichiarato che i satelliti girano intorno ai loro pianeti, come se questi fossero immobili. Partendo da questo fatto Newton ha dimostrato che la tendenza dei satelliti verso i loro pianeti è della stessa natura di quella dei pianeti verso il sole. E poichè la reazione è eguale e contraria all'azione, egli ha conchiuso che il sole viceversa gravita verso i pianeti ed i loro satelliti.

Se le leggi di Keppler considerate nell'idea di una mutua gravitazione tra i corpi componenti il sistema planetario, svelavano da un lato un'azione esistente nei centri dei pianeti, dichiaravano dall'altro che queste azioni centrali dovevano riguardarsi come risultanti delle azioni molecolari delle loro masse. Era d'uopo però

collegare questi due concetti a quello di una gravitazione molecolare in ragione inversa dei quadrati delle distanze, ciò Newton fece coi seguenti teoremi.

I.

Se ai singoli punti di una superficie sferica tendono eguali forze centripete decrescenti nella ragione dei quadrati delle distanze da essi punti: dico che un atomo situato nell'interno della superficie non verrà, per l'azione di queste forze, attratto in veruna parte.

Sia *abcd* (*fig.* 50) la superficie sferica, ed *m* l'atomo posto dentro di essa. Pel punto *m* si conducano le due rette *ac*, *bd* che facciano tra esse un angolo infinitesimo: infinitesimi ancora saranno gli archi *ab* e *cd*, e quindi riguarderemo come rettilinei i due triangoli *amb*, *cmd*, i quali essendo simili ci danno la proporzione

$$ab : cd = am : md.$$

Or immaginiamo che la retta *ac* giri intorno al punto *m* in modo che passando pei punti *a* e *b* percorra il contorno di un piccolissimo poligono sferico; un altro simile ne descriverà coll'estremo *c*, e sul cui contorno starà ancora il punto *d*. Avremo così due piramidi simili, le cui basi saranno nella ragione di $\overline{am}^2 : \overline{md}^2$; e nella stessa ragione saranno le somme delle forze centripete ad esse applicate ed agenti sul punto *m*. Ma queste forze si suppongono reciprocamente proporzionali ai quadrati delle distanze *am* ed *md* dal punto *m*; dunque questo punto sarà egualmente attratto dai due elementi di superficie *ab* e *cd*. Lo stesso ragionamento potendosi applicare a due altri elementi qualunque similmente determinati; ne segue che il punto *m* resterà in equilibrio nell'interno della superficie sferica, perchè animato da forze eguali ed opposte.

II.

Date le stesse cose, dico che un atomo situato fuori di una superficie sferica sarà attratto verso il centro di essa con una forza

reciprocamente proporzionale al quadrato della distanza dallo stesso centro.

Siano ABCD, *abcd* (*fig.* 55) due superficie sferiche eguali; ed M, *m* due atomi situati fuori di esse. Si conducano pei centri O, *o* le rette MB, *mb*; e si conducono ancora le MC *mc*, MD *md*, le quali dai circoli massimi ADB, *adb* taglino l'arco SC = *sc*, e l'arco LD = *ld*. A queste secanti si abbassino le perpendicolari OH, OI, ST; *oh*, *oi*, *st*; e ai diametri AB, *ab* le perpendicolari SP, *sp*. Supponiamo inoltre che gli angoli DMC, *dmc* siano infinitamente piccoli.

I triangoli simili MFI MST, *mfi mst* ci danno le proporzioni

$$MS : MF = ST : FI$$
$$mf : ms = fi : st,$$

donde

$$MS.\,mf : MF.\,ms = ST : st\ [1] = \text{arc.}SL : \text{arc.}sl. \qquad (1)$$

I triangoli simili MOH MPS, *moh mps*, ci danno ancora le proporzioni

$$MS : MO = SP : HO$$
$$mo : ms = ho : sp,$$

da cui

$$MS.mo : MO.ms = SP : sp. \qquad (2)$$

E moltiplicando le due proporzioni (1), (2) si ha

$$MS^2.mo.mf : ms^2.MO.MF = SP.\ \text{arc.}SL : sp.\ \text{arc.}sl.$$

Ma quest'ultimo rapporto è eguale a quello delle zone descritte dagli archi SL, *sl* rotando intorno ai diametri AB, *ab*; ed a queste zone sono proporzionali le somme Z, *z* delle forze centripete che agiscono sui punti M, *m*; dunque avremo

$$Z : z = MS^2.mo.mf : ms^2.MO.MF.$$

Ma per ipotesi le forze centripete sono nella ragione inversa dei quadrati di MS e *ms*; sarà dunque

$$Z : z = mo.mf : MO.MF. \qquad (3)$$

[1] Essendo gli angoli DMC, *dmc* infinitamente piccoli, tali ancora saranno FOH, *foh*, ed in conseguenza FO = OH, *fo* = *oh*. Quindi FI = OI — OF = OI, — OH, ed *fi* = *oi* — *oh*; Ma OI = *oi*, OH = *oh*; dunque FI = *fi*.

Or le somme Z e z delle forze attrattive dei singoli punti delle zone SL, *ls* hanno le loro risultanti Z', z' dirette secondo MB e *mb*, e che sono date dalle equazioni

$$Z' = Z \frac{MP}{MS}, \quad z' = z \frac{mp}{ms};$$

e

$$\frac{MP}{MS} = \frac{MF}{MO}, \text{ e } \frac{mp}{ms} = \frac{mf}{mo};$$

quindi

$$\frac{Z'}{Z} : \frac{z'}{z} = \frac{MF}{MO} : \frac{mf}{mo}. \qquad (4)$$

E moltiplicando tra loro le proporzioni (3) e (4) si ottiene

$$Z' : z' = \frac{MF.mo.mf.}{MO} : \frac{mf.MO.MF}{mo} = mo^2 : MO^2.$$

Collo stesso ragionamento si dimostrerebbe che le risultanti delle forze attrattive delle zone generate dagli archi DC, *dc* sono nella stessa ragione. E continuando la decomposizione delle due superficie sferiche in zone che diano OI = *oi*, OH = *oh*, avremo che l'azione attrattiva della superficie sferica ABCD sul punto M sta a quella di *abcd* su *m*, come mo^2 ad MO^2. Ma le due superficie sferiche si sono date eguali; dunque l'azione di una superficie sferica sopra un punto fuori di essa è inversamente proporzionale al quadrato della distanza che separa il punto dal centro della sfera.

In questi due teoremi stanno i principî fondamentali per calcolare la mutua gravitazione dei corpi sferici. Eccone le principali deduzioni.

— 1°. Un corpo sferico omogeneo potendosi riguardare come composto da un'infinità di strati sferici concentrici di una doppiezza infinitesima; ed essendo l'azione di ogni strato sferico sopra un atomo posto fuori di esso, inversamente proporzionale al quadrato della sua distanza dal centro; nella stessa ragione starà la somma delle azioni degl'infiniti strati componenti la sfera, ossia l'azione dell'intero solido — La stessa ragione, com'è chiaro, avrà luogo per un corpo sferico composto di strati, la cui densità quan-

tunque varia da uno strato all'altro, sia però uniforme per ciascuno di essi.

— 2°. Consideriamo un atomo *m* (*fig.* 56) posto dentro la sfera AB; e col centro *o* ed intervallo *om* immaginiamo descritta la sfera concentrica *mn*. È chiaro (teorema 1°) che tutti gli strati sferici compresi tra le superficie AB ed *mn* equilibreranno le loro azioni sull'atomo *m*, il quale in conseguenza resterà sottoposto alla sola attrazione della sfera che ha per raggio *om*. Or facendo $om = r$, il volume della sfera, come insegna la Geometria, sarà $\frac{4}{3}\pi r^3$, e $\frac{4}{3}\pi k r^3$ ne sarà la massa, *k* disegnando un fattore costante che dipende dalla densità del solido, o di ciascuno dei suoi strati. Ma l'azione della sfera *mn* sull'atomo *m* essendo proporzionale direttamente alla massa ed inversamente al quadrato della distanza, sarà come $\frac{4}{3}\pi\, k\, r^3 : r^2 = \frac{4}{3}\pi\, r : 1$; sarà dunque proporzionale ad *r*, ossia alla distanza dell'atomo dal centro della sfera.

— 3°. Supponiamo due sfere A e B i cui atomi a vicenda si attraggono nella ragione inversa dei quadrati delle distanze. Poichè alla somma delle forze della sfera A sopra un atomo esterno possiamo sostituire una sola forza applicata al suo centro, e lo stesso possiamo fare rispetto a B; segue che l'attrazione reciproca delle due sfere sarà inversamente proporzionale al quadrato della distanza dei loro centri.

44. Newton considerando che il peso dei corpi trasportati sulle più alte montagne non varia sensibilmente, congetturò che la gravità terrestre si estendesse indefinita nello spazio, e che la sua tendenza verso la terra, dichiarata dalle leggi di Keppler, non fosse che l'effetto della gravità terrestre. Questa forza dovrebbe allora variare nella ragione inversa dei quadrati delle distanze, ed in conseguenza deducendo secondo questa ragione dal valore della gravità alla superficie della terra quello che dovrebbe essere alla distanza della luna, si avrebbe l'intensità della forza che ritiene nella sua orbita il satellite del nostro pianeta. Rappresenti *o* il centro della terra (*fig.* 54), *abc* l'orbita della luna. Il tempo della rivoluzione lunare, dato dalle osservazioni astronomiche, si

riduca in minuti; e dividendo i 360 gradi dell'intero giro per questo numero, il quozieute rappresenterà la quantità angolare dell'arco *an* descritto dalla luna in un minuto. Quest'arco, che rappresenta l'effetto della risultante della forza di projezione *at* e della gravità terrestre *am*, dev'essere diagonale del rettangolo costruito su queste due rette. Quindi se immaginiamo distrutta la forza di projezione della luna, questa per l'azione della gravità terrestre descriverebbe in un minuto la retta *am*, sono verso dell'arco *an*. Si divida per metà la corda *an*, e si unisca il suo punto medio *z* col centro *o*. I due triangoli simili *amn*, *aoz* ci danno la proporzione

$$am : an = az : ao,$$

donde

$$am = \frac{az.an}{ao}.$$

Chiamando *r* la distanza *ao* del centro della luna da quello della terra, ed α l'arco descritto in un minuto, avremo

$$az = r.sen\, {}^1\!/_2\, \alpha,\quad an = 2\, r.sen\, {}^1\!/_2\, \alpha;$$

quindi

$$am = 2\, r.sen^2\, {}^1\!/_2\, \alpha.$$

Dai valori della parallassi [1] orizzontale della luna e del raggio terrestre l'Astronomia deduce quello di *r*, ed il valore del raggio terrestre si desume dalla misura di un arco del meridiano. Colle determinazioni di queste grandezze che si avevano nel 1666, epoca a cui si rapportano le prime idee di Newton relativamente ad un sistema di gravitazione universale, egli ottenne il valore di *am*.

D'altronde per le leggi delle oscillazioni del pendolo, già scoverte da Huygens, si conosceva che un grave scendendo nel vôto per un secondo, percorre 15 piedi parigini; e per la legge di accelerazione scoverta da Galileo questo spazio doveva essere di piedi 15.60^2 nella caduta per un minuto. Era anche noto che la distanza media della luna dal centro della terra è di circa 60 rag-

[1] La parallassi orizzontale della luna è l'angolo formato da due rette che partendo dal centro di questo satellite, quando è all'orizzonte, vanno dirette l'una all'occhio dell'osservatore e l'altra al centro della terra.

gi terrestri; quindi se la gravità diminuisce in ragione dei quadrati delle distanze, il senoverso *am* dell'arco descritto dalla luna in un minuto doveva essere di 15 piedi. Newton che supponeva coi geografi della sua nazione che il grado terrestre contenesse 60 miglia inglesi, in vece di 69 che realmente ne contiene, ottenne coi due metodi quì sopra indicati due valori di *am* assai differenti tra loro;quindi egli sospettò che altra forza intervenisse nella produzione del movimento lunare, e pose da canto i risultamenti delle sue ricerche geometriche sulla gravitazione universale. Ma la misura di un arco del meridiano terrestre eseguita in Francia da Picard nel 1676 diede al raggio terrestre un valore più esatto; Newton allora ripetè i suoi calcoli, ed ebbe la soddisfazione di ottenere risultamenti conformi al suo sistema; e la legge della diminuzione della gravità secondo i quadrati delle distanze divenne un dato di osservazione. [1]

Come sopra abbiamo detto, Newton ha dimostrato che tutti i pianeti hanno eguale tendenza verso del sole, e che della stessa natura è quella che i satelliti hanno verso i loro pianeti principali. Ma ora abbiamo veduto che la tendenza della luna verso la terra non è che la gravità terrestre; dunque tutti gli atomi della materia planetaria sono animati da vicendevole gravità decrescente nella ragione dei quadrati delle distanze. Dunque se la terra fosse stata priva di satellite, il sistema della gravitazione planetaria non avrebbe potuto oltrepassare i limiti di una semplice ipotesi.

Posta l'idea di una mutua gravitazione tra gli atomi della materia; le forme dei pianeti, le maree, le orbite delle comete, le perturbazioni planetarie, la precessione degli equinozi, e quindi la nutazione dell'asse della terra, ec. si sono presentati al pensiero di Newton come altrettanti problemi di Meccanica, la cui

[1] Poichè le maggiori altezze alle quali possiamo elevarci non sono che piccole frazioni del raggio terrestre, comprendiamo per qual ragione calcolando nell'ipotesi di una gravità costante la relazione che nella discesa dei gravi deve aver luogo tra lo spazio, il tempo e la velocità, si perviene a risultamenti conformi all'esperienza. (Ved. la nota (G)

soluzione, da lui semplicemente abbozzata, ha offerto ai geometri, che lo hanno seguito in queste sublimi meditazioni, materia di arduo lavoro e di profonde ricerche. I limiti di un'opera elementare di Fisica non ci concedono di entrare in verun particolare a questo riguardo. Il lettore, che abbia le necessarie cognizioni matematiche, troverà le prime basi di questo immenso edifizio nell'immortale libro dei *Principi*, ed il compimento di esso nella *Meccanica Celeste* di Laplace, che meritamente è stato denominato il *Newton francese*. Purtuttavia tra le conseguenze del sistema newtoniano avvene taluna che assai da vicino riguarda la scienza che trattiamo, e che in conseguenza ci facciamo qui ad esporre.

Poichè gli atomi della materia si gravitano a vicenda, la retta che il grave percorre nella sua caduta,deve rappresentare la direzione della risultante di tutte le azioni molecolari tra gli atomi del corpo e quelli della terra. E se questa fosse fisicamente omogenea o almeno composta di strati concentrici, la cui densità quantunque varia dall'uno altro, fosse purtuttavia uniforme per ciascuno di essi; i gravi cadendo percorrebbero la linea del raggio terrestre, supponendo sferica la forma del nostro pianeta. Ma le cognizioni geologiche non ci permettono di riguardare come verisimile niuna delle due ipotesi enunciate; quindi comprendiamo la possibilità di avere l'andamento della superficie di livello delle acque stagnanti, a cui la direzione della gravità è sempre normale, diverso da quello della superficie terrestre nella medesima regione. In conseguenza quando diciamo che i gravi tendono verso il centro della terra, quest'espressione non deve riguardarsi come matematicamente esatta.

Dallo stesso principio di una mutua gravitazione tra tutte le particelle del nostro pianeta deriva che la direzione del filo a piombo deve soffrire un deviamento per l'azione delle grandi masse di montagne. Newton aveva preveduto questo fatto, e nella sua opera sul *sistema del mondo* aveva indicato il metodo di determinarne la quantità, quando nel 1738 Bouguer e la Condamine misurando tre gradi del meridiano terrestre presso Quito nel Perù,

si avvidero che per l'azione del monte Chimborazo il loro filo a piombo deviava di 7",5 dalla verticale. Più tardi, nel 1774, Maskelyne coi mezzi somministrati dalla Società reale di Londra fece analoghe osservazioni al nord ed al sud del monte Schehallieu nella Scozia, ed ottenne un deviamento di 6".

Il deviamento del filo a piombo suggerì a Bouguer l'idea della possibilità di risolvere uno dei più ardui problemi che lo spirito umano avesse mai potuto escogitare, la possibilità di pesare la terra. Ed in vero bastava conoscere il volume della montagna e la sua natura geologica, per determinare con sufficiente approssimazione il suo centro di gravità. Conosciuta la posizione di questo punto, erano date eziandio la direzione dell'azione della montagna sul piombino del filo, e l'angolo che tra esse facevano la forza della montagna e quella della terra. La direzione del filo deviato rappresentava quella della risultante delle due forze; e dai principi di Meccanica sappiamo che tra la risultante e le due componenti esiste la relazione che ciascuna di esse è proporzionale al seno dell'angolo formato dalle altre due. Quindi chiamando T l'azione della gravità terrestre ed m quella della montagna, α l'angolo che la risultante delle azioni molecolari della montagna forma con quella del filo deviato e β la quantità del deviamento, si avrà

$$T : m = sen\alpha : sen\beta.$$

Essendo noto il volume v della montagna e la sua densità d deducendosi dalla sua natura geologica, sarà dato ancora il suo peso $p = d.v$; e poichè il peso della montagna dev'essere a quello della terra come m a T, dunque questo peso sarà noto ancora. Finalmente dividendo il peso della terra pel suo volume, determinato mercè la conoscenza del raggio terrestre, si otterrà il valore della sua densità. Hutton calcolando sulle misure di Maskelyne, trovò la densità della terra 5 volte maggiore di quella dell'acqua.

Lo stesso problema è stato risoluto da Cavendish mediante una bilancia di torsione. Era questa formata (*fig.* 57) da una leva che

sospesa orizzontalmente ad un filo metallico, portava nelle estremità due piccole palle di piombo. Lateralmente a queste palle ed in opposte posizioni si trovavano due grandi globi dello stesso metallo, sospesi verticalmente in modo da poterli avvicinare alle palle. L'apparecchio era chiuso in una stanza priva di ogni comunicazione all'esterno, affinchè l'agitazione dell'aria non avesse preso parte ai movimenti che potevano generarsi per la mutua gravità delle sfere: eravi però in una delle pareti della stanza un foro chiuso da vetro per dar adito alla luce che doveva illuminare l'apparecchio, ed a piccola distanza penetrava per un altro foro un cannocchiale destinato ad osservare i movimenti della leva con maggior precisione. Appena i globi venivano avvicinati alle palle, la leva prendeva un movimento di oscillazione, il quale mentre offriva una pruova diretta della mutua gravitazione delle molecole dei corpi, somministrava ancora i dati necessarî alla determinazione della densità della terra. E poichè le masse ed i volumi delle sfere di piombo egualmente che il volume della terra erano noti, la massa e quindi la densità di quest'ultima venivano ad essere determinate. Così Cavendish ottenne, comparando la densità della terra a quella dell'acqua il numero 5,48.

A sempre più confermare la realtà del sistema newtoniano aggiungiamo in fine che il Cav. Carlini avendo determinata la lunghezza del pendolo che batte i secondi all'Ospizio del Cenisio, il prof. Giulio di Torino ne dedusse che l'attrazione propria della montagna rendeva la lunghezza del pendolo di $0^{mm},214$ maggiore di quella che sarebbe stata senza di essa.

LIBRO TERZO.

FORZE MOLECOLARI.

SEZIONE I.

ATTRAZIONE MOLECOLARE.

45. Tutte le forze della materia, che fin'ora conosciamo, si mostrano proporzionali alle masse dei corpi che ne sono animati, ed in conseguenza ogni minima particella di un corpo sollecitato da una forza, deve possederne una certa frazione. Sotto questa veduta ad ogni forza della materia conviene l'aggiunto di *molecolare*, ed il titolo che abbiamo dato a questa sezione della Fisica si adatterebbe meglio a rappresentarne l'intero sistema. Purtuttavia è d'uopo osservare che non ogni forza estende la sua azione ad una distanza qualunque dalla molecola che la possiede: se è vero che la gravità domina in tutto lo spazio planetario, ed il calore raggiato dalle stelle modera l'eccessivo freddo degli ultimi strati atmosferici; è egualmente vero che la forza, da cui sono insieme ligate le particelle di un corpo, non estende la sua azione che ad una distanza infinitesima dal punto di contatto. Or sono queste forze di un raggio infinitesimo di azione che noi distinguiamo coll'aggiunto di *molecolari*, per indicare che la loro energia è pressochè circoscritta dagli stessi limiti che racchiudono lo spazio occupato da una molecola.

CAPO PRIMO.

Classificazione delle forze molecolari.

46. La resistenza, che un corpo solido oppone alla separazione meccanica delle sue parti, ci dimostra ch'esse sono congiunte dall'azione di una forza speciale, a cui si è dato il nome di *attrazione;* e poichè le minime parti di un solido tuttavia resistono alla loro ulteriore divisione, così la forza che le unisce deve appartenere alle molecole prime, e quindi si è denominata *attrazione molecolare.* La sua sfera di azione sensibile ha un raggio infinitesimo, poichè se cerchiamo ricomporre un solido diviso, col tornare a contatto le facce separate, queste non rimarranno aderenti, e ciascuna parte cederà al suo proprio peso. Dunque la insensibile differenza che la ricomposizione meccanica ha prodotta nella mutua distanza delle molecole, è stata sufficiente a rendere la loro attrazione minore del peso di ciascuna parte, mentre prima gli era maggiore di tutto lo sforzo necessario alla loro separazione.

Si potrebbe per avventura supporre che la violenta separazione delle parti di un solido annientasse la loro attrazione, dimodochè l'inattitudine a congiungersi di belnuovo si dovesse ripetere dall'assoluta mancanza della forza attrattiva piuttosto che dalla sua diminuita intensità. Ma se il corpo, su cui sperimentiamo, è capace di pulimento, allora avvicinando le sue facce separate, dopo averle rese perfettamente piane e livigate, vedremo riprodursi la loro attrazione, e non di rado con una intensità sorprendente. Due cilindri di vetro di 2 pollici di diametro, riscaldati alla temperatura dell'acqua bollente ed unti con un poco di sego, sono restati aderenti in un'esperienza fatta da Muschenbroeck con forza eguale a 130 libbre; e colle medesime condizioni l'adesione è stata di 170 libbre per due cilindri di piombo e di 300 libbre per due cilindri di ferro. Martin riferisce nella *Filosofia britannica* che avendo preso due palle di piombo pesanti circa una libbra, ed avendovi fatta col temperino una sezione piana di presso a $\frac{1}{3}$ di pollice

quadrato, esse restarono mercè una forte pressione così aderenti che un peso di 150 libbre non valse a separarle. In un'altra sperienza egli pose a contatto, interponendovi un poco di sego, due dischi di rame del diametro di pollici $4\frac{1}{4}$, e non potè poi rinvenire due uomini abbastanza robusti per poterli distaccare.

L'attrazione molecolare non agisce soltanto tra le particelle dei solidi: sperienze dirette ci dichiarano ch'essa opera ancora tra quelle dei liquidi, quantunque la loro somma mobilità ci facesse a prima giunta credere ch'esse non avessero alcun legame tra loro. Ad un braccio di bilancia sospendiamo orizzontalmente un disco di vetro, equilibrandolo con pesi all'altro lato; indi avviciniamo al disco una massa di acqua fino a bagnarne la faccia inferiore, ed il disco vi resterà aderente in modo che bisognerà aggiungere un peso non piccolo dalla parte opposta per poterlo separare. Questo peso addizionale non rappresenta la forza di adesione del vetro all'acqua, ma bensì quella che univa lo strato liquido di livello all'altro che immediatamente lo seguiva, poichè il disco staccato dall'acqua è bagnato nella faccia inferiore, vale a dire che ha seco portato lo strato liquido col quale era a contatto. Ed a viemeglio provare che il peso addizionale ha superato la coesione del liquido, aggiungiamo che qualunque sia il solido messovi a contatto, purchè idoneo ad esserne bagnato, sotto le stesse dimensioni richiederà sempre la stessa forza perchè ne sia separato. Questa forza all'opposto varierà secondo la diversa natura dei liquidi messi a contatto con un medesimo solido, come si rileva dalla seguente tavola in cui sono notati i risultamenti ottenuti dal Gay-Lussac con un disco di vetro di circa 118 millimetri di diametro.

NOMI DELLE SOSTANZE.	DENSITA'.	TEMPERATURA.	PESO NECESSARIO A DISTACCARE IL DISCO.
			Grammi.
Acqua	1,0000	8,5	59,40
Alcool	0,8196	8	31,08
id.	0,8595	10	32,87
id.	0,9415	8	37,15
Essenza di terebentina	0,8695	8	34,10

47. La divisione meccanica non può decomporre un corpo che in parti, le quali per quanto siano piccole, saranno sempre simili al tutto ch'esse formavano. Possiamo, per esempio, mediante triturazione ridurre un pezzo di marmo in una polvere finissima, ma ogni granello di essa non avrà proprietà differenti da quelle che presentava la massa intera. Or l'analisi chimica sa decomporre ciascuno di questi granelli in due sostanze differentissime, l'una aeriforme (l'acido carbonico) e l'altra consistente in una terra bianca (la calce): l'acido carbonico poi si trova composto di *carbonio* (base del carbone comune) e di un fluido aeriforme, ch'è *l'ossigeno*; e la calce dal canto suo è un altro composto di ossigeno e di un metallo denominato *calcio*. In conseguenza ogni granello del marmo è un composto di particelle più piccole, ossia *atomi*, di ossigeno, carbonio e calcio. Se l'azione meccanica non vale a separare questi atomi, il chimico perviene a disunirli mercè l'azione preponderante che qualche altra sostanza può avere sopra taluni di essi: così l'attrazione più intensa che passa tra la calce e l'acido solforico fa sì che versando questo liquido sulla polvere di marmo, si produrrà un'effervescenza, durante la quale l'acido carbonico abbandona la calce, riprendendo il suo stato aeriforme.

Dunque l'attrazione molecolare si presenta sotto tre forme differenti — 1ª Essa è una forza di *coesione* o di *aggregazione*, quando riunisce le particelle omogenee, in cui un corpo può risolversi mediante una divisione meccanica — 2ª È forza di *adesione*, quando riunisce corpi omogenei o eterogenei, che si toccano per superficie levigatissime — 3ª È finalmente *affinità*, se compone atomi di diversa natura. E questa triplice divisione non muove soltanto da diversità di circostanze, ma benanche da differenze caratteristiche nelle leggi di azione. Ed in vero la coesione e l'adesione non dipendono dalla speciale natura dei corpi che pel solo riguardo di quantità; un filo di ferro, per esempio, sarà più tenace di un filo di ottone di egual diametro, ed un disco di vetro avrà per l'acqua un'adesione maggiore che pel mercurio. Nè mai la coesione o l'adesione agiscono sopra quantità di particelle definite da veruna relazione numerica: così osserviamo che indipendentemente

dalla quantità una massa metallica fusa dall'azione del calore, diverrà sempre egualmente coerente nelle sue molecole, quando venga solidificata con un metodo costante di raffreddamento. E finalmente sì la coesione che l'adesione possono essere comparate in grandezza a qualsivoglia forza meccanica, e quindi misurate: così nelle sperienze di sopra citate si è trovato che la coesione dell'acqua al vetro sopra un'estensione circolare di 118 millimetri è vinta da un peso di grammi 59,4 — Al contrario l'affinità è così intimamente ligata alla speciale natura dei corpi, che in questa proprietà il chimico trova una base sicura pei suoi processi analitici; essa spiega la sua azione sopra quantità di materia, definite da tali relazioni numeriche che permettono rappresentare con simboli algebrici (formole atomistiche) la legge di composizione di un corpo; ed infine non essendo l'affinità superabile da veruna forza meccanica, non può a questa compararsi, e quindi non è capace di misura.

48. I corpi si dilatano col divenire più caldi, e diminuiscono di volume raffreddandosi, come dichiarano le seguenti sperienze — 1ª Sopra una lamina metallica sufficientemente piana segniamo una linea, e misuriamo esattamente la sua lunghezza: indi circondiamo la lamina con neve mescolata ad un pòco di sale, e dopo averla lasciata per un tempo sufficiente sotto l'azione del mescuglio frigorifero, torniamo a misurare la lunghezza della linea; la troveremo sensibilmente diminuita. Viceversa troveremo questa lunghezza aumentata, se misureremo dopo che la lamina sia stata per alquanti minuti in un bagno di acqua bollente — 2ª Prendiamo un sottile tubo di vetro terminato da una pallina, ed empiamo sì questa che una gran parte bel tubo di un liquido qualunque, il cui livello segneremo sul vetro. Or questo livello si vedrà discendere o salire, secondochè la pallina verrà circondata di neve ovvero immersa in un bagno caldo. — 3ª Prendiamo un tubo simile al precedente, e colla mano riscaldiamone la pallina per qualche tempo: immergendo poi nell'acqua l'estremità libera del tubo, vedremo il liquido salire in esso, a misura che la pallina si andrà raffreddando. Or se dopo che il liquido sia divenuto sta-

zionario, noi tocchiamo la pallina con un corpo più caldo o più freddo di essa, vedremo il liquido discendere nel primo caso, e vieppiù elevarsi nel secondo; vale a dire che l'aria contenuta nella pallina si è dilatata pel calore, e si è contratta pel freddo.—Dunque il calore, in quanto che modifica la mutua distanza delle particelle di un corpo, è ancor esso una forza molecolare.

CAPO SECONDO.

Diverse forme della forza di aggregazione.

49. La pressione, la percossa, la trazione, la flessione, l'azione di una punta che s'incunea tra le particelle di un corpo, ec. costituiscono altrettanti metodi meccanici per vincere la forza di aggregazione di un solido. E se il corpo che cede più facilmente di un altro alla percossa, nella stessa ragione cedesse alla pressione, flessione, ec. basterebbe sperimentare con un solo di questi metodi per dedurne gli effetti che si otterrebbero da ciascuno degli altri. Ma poichè i risultamenti dell'esperienza si oppongono a questa ipotesi, si è dovuto classificare i corpi secondo la resistenza che essi presentano ad un dato modo di azione meccanica; ed il vario grado di resistenza si è riguardato come una proprietà del corpo, e quindi si è indicato con un nome speciale. Così abbiamo alcuni corpi *teneri* ed altri *duri*: i primi cedono con faciltà all'azione di un corpo acuminato, gli altri resistono in modo da non restarne segnati; è *tenero*, per esempio, il piombo, sono *duri* il diamante, le pietre preziose, l'acciajo temperato, ec.—È *molle* il corpo, la cui figura riceve alterazioni permanenti sotto l'azione di una leggiera pressione, come la cera, l'argilla umida, ec.; ma se cessando la pressione il corpo ritorna alla prima figura, allora si dirà *elastico*.— La *tenacità* è la resistenza che un corpo oppone alla percossa o alla trazione, e *fragilità* la propietà opposta—Sono *rigidi* o *flessibili* i corpi secondochè resistono più o meno alla forza di flessione—Sono *duttili*, e *malleabili* quando si possono facilmente ridurre in fili e lamine.

Questi diversi modi di aggregazione molecolare possono venire alterati da sforzi meccanici o da grandi variazioni di temperatura. È noto che i metalli duttili s'induriscono sotto l'azione continuata del martello, della filiera, ec; e divengono acri al segno che non si può continuare una di queste azioni meccaniche senza vederli rompere o almeno crepolarsi. Allora è necessario *ricuocere* il metallo, vale a dire riscaldarlo ad alta temperatura, e poi lasciarlo raffreddare colla massima lentezza: così facendo, le molecole ritorneranno alla loro primitiva aggregazione.

Poichè il calore tende ad aumentare la mutua distanza delle molecole, è facile comprendere ch'esso deve contrariare la forza di aggregazione sotto qualunque forma si presenti, e quindi aumentare il grado di quelle proprietà che dipendono da una debole coesione. Così i metalli divengono più duttili come aumenta la loro temperatura: il ferro fuso, ch'è duro quando è freddo, riscaldato fino al rosso cede all'azione della sega; ed il vetro, che conosciamo rigido e fragile, si lascia filare come la seta ad un certo grado di calore.

Effetti contrarî si ottengono dalla sottrazione di calore, come vien dichiarato dal fatto della *tempera*. È noto che i corpi atti a ricevere questa modificazione, l'acquistano coll'immersione in un bagno freddo, dopo essere stati fortemente riscaldati. In questo modo si tempera l'acciajo, e diviene duro ed elastico; e per quanto più elevata è stata la sua temperatura prima dell'immersione, maggiore sarà il grado della sua durezza, dimodochè si può ottenere l'acciajo sì fortemente temperato da riuscire fragile come il vetro. Le *lagrime batave*, che si ottengono facendo cadere delle gocce di vetro fuso in un bagno di acqua fredda, dichiarano meglio le modificazioni che la tempera apporta nell'equilibrio molecolare di un corpo. Spezzando il filo *cd* (*fig.* 58) della lagrima, nel corpo *ce* si produce uno scoppio che lo riduce in una massa polverulenta. Ciò dimostra che nell'atto del subitaneo raffreddamento le molecole che si trovavano alla superficie della lagrima, si sono consolidate e ne hanno definito il volume, mentre l'interno della massa era tuttavia dilatata da un intenso

calore, quindi allorchè pel progresso del raffreddamento questa massa interna avrebbe dovuto contrarsi, l'attrazione molecolare delle falde superficiali con una forza di trazione dall'interno all'esterno ha impedito questo movimento intestino, e le particelle sono restate ad una distanza maggiore di quella che conveniva alla normale densità del corpo. Bastava dunque rompere la continuità della falda superficiale sopra un punto qualunque della lagrima, perchè si fosse distrutto il sistema molecolare, e ridotto in piccoli frantumi. Un eguale effetto non si può ottenere dalla tempera dell'acciajo, poichè i metalli (come diremo a suo luogo) trasmettono facilmente il calore attraverso la loro sostanza, quindi non si può raffreddare instantaneamente la loro superficie, senza produrre pressochè nel tempo stesso una considerevole sottrazione di calore dall'interno: al contrario il vetro, perchè pessimo conduttore di calore, permette che si ottenga il primo effetto ad un certo intervallo di tempo dal secondo.

Se la rapida sottrazione di calore dà all'acciajo ed al vetro quella speciale costituzione molecolare, che costituisce la loro tempera, basterà riscaldarli di bel nuovo alla temperatura che avevano prima dell'immersione, e poi abbandonarli ad un lento raffreddamento, perchè restino interamente stemperati; e se l'acciajo venga ricotto a temperature più basse di quella, in cui ha ricevute la tempera, non ne perderà che una porzione più o meno grande, secondo il grado di calore comunicato. Vi sono però dei corpi che acquistano o perdono la loro tempera con un procedimento del tutto opposto: così la lega di quattro parti di rame ed una di stagno, di cui si fanno gli strumenti cinesi, denominati *tam-tam*, diviene fragile come il vetro per una lenta sottrazione di calore, e risulta malleabile da un rapido raffreddamento.

CAPO TERZO.

Elasticità.

50. Nell'equilibrio molecolare permanente che costituisce lo stato solido della materia, le particelle di un corpo possono, senza ledere la continuità della massa, cedere all'azione di una forza meccanica ed allontanarsi più o meno dalle loro posizioni di equilibrio. Se in questo movimento intestino del sistema molecolare le particelle conservano una tendenza verso le loro prime posizioni, il corpo sarà elastico; e viceversa sarà duttile, se le particelle quasi che avessero un equilibrio indifferente, conservano le nuove relazioni di sito, ancorchè sia cessata l'azione perturbatrice.

Quando la cagione meccanica, che ha squilibrato il sistema molecolare di un corpo elastico, cessa di agire, le particelle del sistema ritorneranno alle prime posizioni di equilibrio in virtù dell'azione continua della forza di aggregazione; e poichè l'intensità di questa forza decresce sì celeramente in ragione della distanza, da essere nulla ad una distanza finita; così le particelle del corpo torneranno alle loro prime posizioni con un movimento accelerato secondo una rapida progressione. Per questa velocità acquistata esse trascorreranno le posizioni di equilibrio, finchè l'azione opposta della forza di aggregazione non le riconduca sullo stesso cammino; quindi esse compiranno oscillazioni analoghe a quelle di un pendolo, e che sotto ampiezze costanti terrebbero il sistema in un movimento perpetuo, se non trovassero ostacolo nella stessa costituzione fisica del corpo. Facciamo, per esempio, cadere una palla di avorio sopra un piano di marmo unto di olio, ed inclinando molto il raggio visuale sul piano, vedremo una macchia circolare oscura nel luogo dell'urto; segno evidente che la palla si è depressa in contatto del piano, e quindi in vece di un punto ne ha toccato molti. Laonde le molecole che hanno toccato il piano, sono state spinte nell'interno della palla; e se nel ritor-

no alle loro posizioni di equilibrio, le avessero oltrepassato di quanto ne erano state allontanate, la palla nel rimbalzo avrebbe dovuto risalire all'altezza donde era caduta, meno la piccola differenza prodotta dalla resistenza dell'aria. Ma poichè l'esperienza fa conoscere che la caduta della palla vien seguita da una serie di rimbalzi che rapidamente decrescono in altezza; è chiaro che le particelle dell'avorio non hanno oltrepassato le loro posizioni di equilibrio di quanto l'urto ne le aveva allontanate. Nessuno dei solidi elastici conosciuti soddisfa esattamente questa condizione, e secondochè si approssimano più o meno a questo limite di perfetta elasticità, si diranno più o meno elastici.

La quantità di moto prodotta dalle forze molecolari è funzione del tempo, come per ogni altra forza continua. Così vediamo l'adesione di due corpi crescere d'intensità col prolungarsi del contatto: le lastre, per esempio, che sono state a contatto per molto tempo, si sono rinvenute talvolta aderenti con tanta forza da non potersi separare senza rompersi. Similmente osserviamo che una lamina di acciajo temperato, che sia stata piegata per un tempo sufficiente, al cessare della forza di flessione conserva un poco dell'alterazione sofferta nella sua forma. Pare dunque che le molecole di un corpo elastico tenute per un tempo sufficiente lontane dalle loro posizioni di equilibrio, acquistino delle nuove tendenze che in parte equilibrano quelle che avevano prima di esserne allontanate da un'azione meccanica.

51. I fenomeni che avvengono nell'urto dei corpi elastici sono conseguenze delle condizioni alle quali è sottoposto il loro equilibrio molecolare. Sia AB (*fig.* 63) un piano contro cui viene ad urtare una palla elastica m con una velocità v rappresentata in intensità e direzione dalla retta mc; e chiamo α l'angolo che la mc forma colla kc normale alla superficie AB. Riguardando la velocità mc come risultante di gc e kc, è chiaro che quest'ultima soltanto produrrà la depressione del solido nell'atto dell'urto; e perciò chiamando e il rapporto dell'elaterio alla depressione, col rimbalzo si produrrà in direzione opposta alla kc una velocità rappresentata da $e.v.\cos\alpha$. E poichè la componente $gc = v.\operatorname{sen}\alpha$, tangenziale

alla superficie, non ha ricevuto dall'urto nessuna alterazione, così la palla rimbalzerà colla velocità

$$v' = \sqrt{v^2(e^2 \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)},$$

e percorrerà la retta *cn*, la quale starà nello stesso piano normale che contiene la direzione d'incidenza *cm*, e farà con *ck* un angolo dato da $\frac{v.e.\cos\alpha}{v'}$. Or se fosse $e = 1$, vale a dire l'elasticità perfetta, si avrebbe $v' = v$, e l'angolo di riflessione $kcn = \alpha$. Dunque l'eguaglianza dell'angolo di riflessione a quello d'incidenza, nel rimbalzo dei corpi elastici, è un limite a cui il fatto tanto più si approssima per quanto è maggiore l'elasticità del corpo.

Nella stessa ipotesi di $e = 1$ cerchiamo quali effetti risulterano dall'urto di due palle elastiche A e B (*fig.* 59) che si muovono lungo la retta *ab* che unisce i loro centri di gravità. Supponiamo in primo luogo che i due corpi si muovano nello stesso senso e che A raggiunga B. Chiamando m e v la massa e velocità di A, m' e v' quelle di B, sarà mv la forza di A ed $m'v'$ quella di B; e perciò quando l'urto avrà prodotto nelle due palle la massima depressione, esse avranno la velocità comune

$$w = \frac{mv + m'v'}{m + m'};$$

quindi A avrà perduto la volocità $v - w$, e B avrà guadagnata la velocità $w - v'$. Or l'elaterio che succede all'urto riproducendo le stesse alterazioni in senso opposto, la velocità di A verrà nuovamente diminuita di $v - w$, e quella di B riceverà un secondo aumento eguale a $w - v'$; quindi dopo l'urto A avrà la velocità

$$u = v - 2\,(v - w),$$

e quella di B sarà

$$u' = v' + 2\,(w - v');$$

Sostituendo in queste formole a w il suo valore troveremo

$$u = \frac{mv + m'(2v' - v)}{m + m'},$$

$$u' = \frac{m'v' + m(2v - v')}{m + m'}. \qquad (a)$$

Applicazione — 1° se facciamo $m = m'$ avremo

$$u = v',\ u' = v,$$

vale a dire che le due palle avranno permutato le loro velocità. — 2° se alla condizione precedente aggiungiamo l'altra di $v' = o$, ossia B nello stato di riposo, le formole precedenti ci daranno

$$u = o,\ u' = v,$$

vale a dire che la palla urtante cederà la sua velocità all'altra, lasciando essa nello stato di riposo.

Le stesse formole (a) si potranno applicare al caso in cui le due palle camminano l'una all'incontro dell'altra, sostituendo $-v'$ a v'; ed avremo così

$$u = \frac{mv - m'(2v' + v)}{m + m'}$$

$$u' = \frac{m(2v + v') - m'v'}{m + m'}.$$

Applicazione — 1° supponendo $m = m'$, avremo

$$u = -v',\ u' = v;$$

dunque le due palle ritorneranno sul loro cammino colle velocità permutate — 2° Facciamo $v = v'$, ed $m = 3m'$; avremo

$$u = o,\ u' = 2v,$$

ossia che la palla maggiore tornerà alla quiete, e la minore sarà respinta con una velocità doppia di quella che aveva la maggiore.

52. I fili e le verghe possono avere tra certi limiti un' elasticità perfetta, vale a dire che allungati mediante una forza di trazione, ritornano esattamente allo stato primiero quando sia cessata l'azione perturbatrice dell'equilibrio molecolare. Le prime ricerche relative a questo metodo di esplorare l'elasticità dei corpi ridotti in fili o verghe, furono eseguite da S' Gravesande coll'apparecchio rappresentato dalla (*fig.* 60). Ai punti *a* e *b* era fermata la verga su cui si voleva sperimentare, e nel caso di un filo se gli dava un leggiero grado di tensione, per distenderlo in linea retta. Indi con un piccolo uncino *t* si sospendeva alla metà della verga o del filo un piattello di bilancia per aggiungervi dei pesi che dovevano allungare il corpo elastico; ed allo stesso uncino era fermata una catenella che passava per la gola di una girella *z*, e portava nell'altro estremo un peso per equilibrare il piattello *v*. Alla girella era fermato un indice *s*, che percorreva la circonferenza di un cerchio graduato *mn*. Quando si aggiungevano dei pesi al piattello *v*, il punto medio del filo si abbassava percorrendo la freccia *et*, un'eguale lunghezza della catenella passava per la gola della girella, e l'indice percorreva una lunghezza di arco eguale alla freccia *et* moltiplicata pel rapporto del raggio del cerchio a quello della girella; quindi dall'estensione dell'arco percorso dall'indice si poteva dedurre il valore di *et*. A questo sistema del cerchio graduato e della girella Savart ed altri fisici moderni hanno sostituita la misura diretta per mezzo del catetometro [1].

Determinata *et*, il triangolo rettangolo *ate* ci dà
$at = \sqrt{ae^2 + et^2}$; e l'allungamento del corpo elastico sarà definito da $2(at - ae)$. Bisogna inoltre conoscere la quantità di trazione prodotta nel filo, vale a dire la componente del peso secondo *at*. Chiamanda p il peso, la trazione era $p \cos . atc = p \frac{te}{ta}$.

[1] Il catetometro ossia *misuratore delle perpendicolari*, consiste in un cannocchiale orizzontale, che può scorrere lungo una riga verticale graduata in millimetri, e che porta un nonio, da cui si ottengono piccole frazioni di millimetro. Dirigendo successivamente l'asse del cannocchiale agli estremi di una retta verticale, la quantità di millimetri e parti di essi che avrà percorso l'asse del cannocchiale sulla riga graduata, rappresenterà la lunghezza della retta.

$\frac{e}{l}$. Con questo metodo S'Gravesande ha conosciuto che tra i limiti di perfetta elasticità, vale a dire di esatto ritorno alla forma rettilinea appena cessata l'azione meccanica, gli allungamenti sono proporzionali alla forza di trazione.

Sperimentando sopra verghe o fili di una certa doppiezza, il peso, da cui sono gravati nella sezione media, non produce una linea spezzata *atb*, ma due lati curvilinei. In questo caso Savart ha usato l'apparecchio rappresentato dalla (*fig.* 61), nel quale la verga è situata verticalmente, fermata nell'estremità superiore e gravata da pesi nell'estremità inferiore. Allora la forza di trazione è eguale al peso, e l'allungamento è misurato per mezzo del catetometro. Nella tavola seguente sono notati taluni risultamenti delle sue ricerche.

SOSTANZE.	DIMENSIONI		PESI TENDENTI						
	Lunghezza totale.	Diametro.	0ch.	5ch.	10ch.	15ch.	20ch.	25ch.	30ch.
			LUNGHEZZA DELLA PARTE MISURATA.						
	m	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
Rame...	1,3190	2,77	930,53	930,59	930,65	930,71	930,77	930,84	930,90
Rame...	1,3190	2,77	473,25	475,28	475,33	475,36	475.38	475.42	475,45
Rame...	1,3000	1,30	930,59	930,84	931,16	931,45	931,70	932,00	932,27
Ottone..	1,3165	2,90	930,82	930,90	930,97	931,04	931,12	931,20	931,27
Acciajo.	1,3184	2,77	930,25	930,29	930,34	930,38	930,41	930,46	930,50
Ferro...	1,3150	2,90	930,50	930,54	930,57	930,60	930,62	930,65	930,68
Vetro...	0,976	3,817	936,69	936,76	936,83	936,91	936,96	937,04	937,12
Vetro...	0,939	4,078	937,04	937,12	937,16	937,22	937.27	937,34	937,39
Vetro...	0,980	7,55	937,39	937,40	937,43	937,45	937,46	937,48	937,50

Diciamo *coefficiente di elasticità* la quantità di peso, da cui dovrebbe esser tratta una verga di un metro di lunghezza e di un millimetro quadrato di sezione, perchè la sua lunghezza si aumentasse di un millimetro. Conosciuto questo coefficiente *e* per una

data sostanza, sarà facile determinare l'allungamento *d* che si avrà da una verga di lunghezza *l*, di sezione *s*, e tratta da un peso *k*; poichè avremo

$$d = \frac{k}{e} \cdot \frac{l}{s}.$$

Valori di e.

	Chilog.	
Ferro.	20	Duleau,
	23	Tredgold.
	21,193	Savart.
Ferro fuso.	9,029	Rondelet.
	12,	Tredgold.
	11,530	*Id.*
Acciajo.	18,134	Savart.
Rame.	13,147	*Id.*
	10,767	*Id.*
	12,494	*Id.*
Ottone.	9,815	*Id.*
Vetro.	5,847	*Id.*
	5,993	*Id.*
	5,234	*Id.*
Legno di Quercia.	1,012	Duhamel.
	1,688	Dupin.
	1,300	Rondelet.
	1,510	Barlow.
	0,683	*Id.*
Legno di abete.	1,029	Dupin.
	1,300	Rondelet.
	0,934	Barlow.

Intorno all'uso che può farsi di questi numeri sono da osservarsi tre cose. — 1ª Le sperienze eseguite dal sig. Duleau dimostrano che per un medesimo solido l'elasticità ha lo stesso valore numerico, sì per effetto di trazione che di compressione: così se una verga di ferro di un metro di lunghezza e di un millimetro di sezione, richiede un peso di 20 kilogrammi per allungarsi di un millimetro, dovrà viceversa esser premuta nel senso della sua lunghezza da un egual peso per accorciarsi di un millimetro. 2ª Per quanto un corpo possa sembrare fisicamente omogeneo in tutta la sua estensione, non possiamo dedurne che avrà pertutto la stessa elasticità, e quindi la medesima aggregazione molecolare; poi-

chè Savart ha osservato che segnati di decimetro in decimetro dei punti di ritrovo sulla lunghezza di talune verghe, queste non si allungavano di eguale quantità nelle parti di eguali lunghezze. — 3º Per le sperienze di W. Weber conosciamo che l'allungamento definitivo di un filo elastico sottoposto ad una data forza di trazione, si compone di due parti, l'una che si produce istantaneamente, e l'altra, che avviene in un certo tempo, dapprima progredisce rapidamente, e poi va mano mano rallentandosi fino a toccare il suo limite. Similmente avviene del movimento di contrazione che succede all'allungamento, quando il filo si è sgravato del peso addizionale: una parte dell'allungamento si distrugge in un istante, e l'altra svanisce colla stessa lentezza con cui si è prodotta.

Partendo dal fatto che le forze molecolari sono nulle ad una distanza finita dal contatto, Poisson ha dimostrato che se un corpo elastico si allunga per trazione di una quantità α il suo volume aumenterà nel rapporto di $1 + \frac{1}{2}\alpha : 1$. Pressocchè nel tempo stesso il sig. Cagniard-Latour ha dichiarato con un'esperienza l'esattezza di questo risultamento analitico. Egli immerse verticalmente un filo di ottone in un tubo di vetro pieno di acqua: indi facendo emergere di 6 millimetri la parte immersa del filo, osservò che l'acqua si abbassava nel tubo di 5 millimetri; dunque una lunghezza di 6 millimetri del filo equivaleva in volume ad una lunghezza di 5 millimetri di acqua nel tubo. Fermata poi l'estremità inferiore del filo al fondo del tubo, lo sottopose ad una forza di trazione nel senso della sua lunghezza, finchè questa si accrebbe di 6 millimetri; e per questo allungamento l'acqua non era discesa che di 2 millimetri e mezzo, ossia della metà del primo abbassamento. Or i 6 millimetri, di cui la trazione ha aumentato la lunghezza del filo, rappresentano la quantità α, equivalente a 5 millimetri di acqua nel tubo; e poichè durante l'allungamento del filo l'acqua non era discesa che di 2 millimetri e mezzo, ossia di $\frac{1}{2}\alpha$, così il volume del filo si era aumentato di $\frac{1}{2}\alpha = 2$ millimetri e mezzo.

53. L'elasticità si manifesta ancora nel torcimento di un filo od

anche di una verga intorno al suo asse. A tale oggetto si pone verticalmente il filo, fermando l'estremità superiore e sospendendo all'inferiore un peso di forma cilindrica che confonda il suo asse con quello del filo. All'asse del cilindro è annesso un indice leggiero, mobile sulla circonferenza di un cerchio graduato, come rappresenta la *fig.* 62. Con un simile apparecchio Coulomb è pervenuto ai seguenti risultamenti.

— 1° Girando l'indice di un certo numero di gradi e poi abbandonandolo a se stesso, si produce una serie di oscillazioni isocrone, quantunque le loro ampiezze decrescano continuamente fino a ridurre il filo e quindi l'indice allo stato di riposo. Questa successiva diminuzione nell'ampiezza delle oscillazioni è in gran parte prodotta dalla resistenza che la costituzione fisica del filo oppone ai movimenti delle molecole; poichè Coulomb ha osservato che avvolgendo con lunghi cilindri di carta i cilindri metallici sospesi ai fili, le ampiezze delle oscillazioni non decrescevano con una rapidità corrispondente all'aumento della resistenza dell'aria. L'isocronismo poi delle oscillazioni dichiara che le molecole allontanate per mezzo del torcimento dalle loro posizioni di equilibrio, tendono di ritornarvi con una forza proporzionale all'angolo, di cui ne sono state allontanate, ossia all'arco che resta a descrivere. Ed in vero sia *am* (*fig.* 65) l'arco descritto dalla molecola *a* per forza di torcimento, e che sarà ancora l'arco della prima semi-oscillazione, quando la forza perturbatrice avrà cessato di agire. L'ampiezza delle oscillazioni diminuendo continuamente, in vece di *ma* l'arco di semi-oscillazione dopo un certo tempo diverrà *na*; e poichè le oscillazioni sono isocrone, il secondo arco sarà descritto nello stesso tempo del primo. Or immaginando questo tempo costante diviso in elementi infinitamente piccoli, in ciascuno di essi l'elasticità del filo avrà comunicato un impulso alle molecole oscillanti: ed in conseguenza egual numero d'impulsi avrà ricevuto la molecola *a* tanto per l'arco *ma* che per l'arco *na*. Quindi perchè questi archi siano descritti in tempi eguali, i valori di questi impulsi debbono essere proporzionali alle lunghezze degli spazi descritti; vale a dire che la tendenza della molecola di ritorna-

re alla sua posizione di quilibrio è stata nei punti *m* ed *n* proporzionale agli archi *ma* ed *na*. Or è questa tendenza che viene equilibrata dall'azione meccanica del torcimento; dunque quest'angolo di deviamento può divenire misura di una forza, ed a suo luogo vedremo qual partito ne abbia tratto Coulomb per misurare le forze elettriche e magnetiche.

— 2° Gravando uno stesso filo con cilindri di eguale diametro, ma di diverso peso, Coulomb ha trovato che i tempi delle oscillazioni erano proporzionali alle radici quadrate dei pesi. Così per un filo di ferro caricato successivamente di mezza libbra e di due libbre, la durata di 20 oscillazioni è stata di 120″ nel primo caso e di 242″ nel secondo. Or chiamando f la forza di torsione, t la durata di un'oscillazione, p il peso del cilindro sospeso al filo ed a il suo raggio, g la forza di gravità, e π il rapporto della circonferenza al diametro; la Meccanica razionale trova tra queste quantità la relazione

$$t = \pi a \left(\frac{p}{2gf}\right)^{1/2}$$

Applicando questa formola all'esperienza precedente, abbiamo che t varia nella stessa ragione di $p^{1/2}$; dunque f è restata costante, vale a dire che la forza di torcimento è indipendente dal peso del cilindro attacato al filo. Era però facile prevedere che questa indipendenza avrebbe trovato un limite in quel peso che avesse stabilmente alterato l'equilibrio molecolare del filo; ed in fatti Coulomb ha trovato che quando il peso tenuto dal filo eccede un certo limite, f diminuisce.

— 3° Variando la sola lunghezza del filo, i tempi delle oscillazioni sono come le radici quadrate delle lunghezze. Dallo stesso filo di ottone Coulomb ha tagliato due lunghezze l'una di 9 pollici e l'altra di 36, le ha caricate di eguali pesi, ed ha trovato che per 20 oscillazioni la prima impiegava 110″ e l'altra 222″: quindi le durate delle oscillazioni erano nello stesso rapporto di 1 a 2 che esiste tra le radici quadrate di 9 e 36. Or dalla formola precedente è facile dedurre che la radice di f deve diminuire nel-

lo stesso rapporto in cui aumenta t: quindi la forza di torcimento dev'essere in ragione inversa della lunghezza del filo.

— 4° Conservando la stessa lunghezza, i tempi si sono trovati inversamente proporzionali ai pesi dei fili della stessa natura vale a dire ai quadrati dei loro diametri. E poichè nella formola f è inversamente proporzionale al quadrato di t; dunque la forza di torcimento è direttamente proporzionale alla quarta potenza del diametro.

Conosciamo dunque che la forza di torcimento dipende dalla natura del filo, dalla quarta potenza del suo diametro, e dalla sua lunghezza. Quindi chiamando m un fattore dipendente dalla natura del filo, D il suo diametro ed L la lunghezza, avremo

$$f = m\frac{D^4}{L}.$$

Questa relazione però ha luogo finchè il filo torna alla sua prima posizione di equilibrio, quando ogni movimento di oscillazione è finito. Ma questo non avviene per ogni quantità di torcimento; poichè se il filo sia stato torto oltre un certo limite, variabile secondo la sua natura, diametro e lunghezza, esso si ferma in una posizione di equilibrio che differisce dalla primitiva di più gradi, ed in taluni casi anche di più circonferenze. Coulomb, che all'oggetto ha fatto molte ricerche, chiama *centro di reazione* la primitiva posizione del filo, *traslocazione del centro di reazione* la quantità angolare di cui pel torcimento differisce dalla primitiva, e finalmente *estensione della reazione del filo* la quantità di cui difinitivamente esso si svolgeva.

Le sperienze di Coulomb sui fili metallici sono state estese alle verghe da Duleau, Savart, Bevan; e si è trovato che le verghe sono sottoposte alle stesse leggi dei fili.

SEZIONE II.

DEL CALORE CONSIDERATO NEI SUOI EFFETTI MOLECOLARI.

54. Il calore e l'attrazione molecolare sono in continua opposizione. Se il calore diminuisce, l'attrazione molecolare prepondera e restringe il corpo in un volume minore; e viceversa questa diminuisce quando il calore aumenta, ed allora il corpo si dilata.

La forza ripulsiva del calore considerata nei suoi effetti molecolari decresce in funzione della distanza con una celerità maggiore dell'opposta attrazione. Ed in vero se le due contrarie azioni diminuissero secondo una stessa progressione, una volta che un corpo avrebbe cominciato a dilatarsi, questo movimento non troverebbe limite che nella dispersione delle molecole nello spazio; risultamento contraddetto dall'esperienza, la quale ci fa conoscere che la dilatazione è una quantità definita dalla natura del corpo e dal grado di calore.

Il calore non limita la sua azione alla sola produzione dei movimenti molecolari. Esso si estende indefinito nello spazio: così osserviamo che ad 80 e più milioni di miglia la varia intensità e durata del calore solare prende parte alla varietà dei climi, e produce l'avvicendamendo delle stagioni. Come poi lo stesso agente possa da un lato restringersi nella sfera dell'atomo, mentre da un altro si diffonde indefinito nello spazio, è un problema tuttavia insolubile ad onta delle cento ipotesi escogitate per coordinare i fenomeni termici ad un qualche principio sistematico.

In questa sezione non diremo che dei soli effetti molecolari del calore. L'esposizione delle leggi che reggono la sua azione a distanza, sarà la materia del IX libro di quest'opera.

CAPO PRIMO.

Storia del termometro.

55. Conosciamo il calore per mezzo di una sensazione, la quale potendo essere variamente modificata nella sua intensità secondo il diverso stato antecedente dell'organo, non potrà essere giammai un mezzo di misura. Prendiamo tre bacini A, B, C; versiamo acqua fredda in A, acqua calda in C ed acqua alla temperatura del mezzo ambiente in B. Immergiamo una mano in A ed un' altra in C, e dopo averle tenute immerse per qualche tempo, portiamole tutte due nel bacino B: osserveremo che l'acqua ivi contenuta sembrerà calda alla mano uscita dal bacino A, e fredda a quella tolta da B.

56. Ogni strumento di misura riducendosi sempre ad una determinazione di quantità lineari, l'unico fatto termico che poteva offrire un'applicazione di questo principio generale e quindi un *misuratore del calore*, era il fenomeno della dilatazione, vale a dire l'aumento che ricevono le dimensioni del corpo in conseguenza di accresciuto calore. La prima attuazione di questa idea si trova nel *termometro* (misuratore del calore) costruito da Galileo nel 1597. Egli prese un cannello di vetro, aperto in un estremo e terminato nell'altro da una pallina: v'introdusse un poco di acqua, e poi ne immerse l'estremità aperta in un piccolo recipiente dello stesso liquido. La pressione dell'aria manteneva l'acqua nel tubo ad un livello più alto che nella vaschetta; e questa differenza di altezza diveniva maggiore o minore, secondochè l'aria contenuta nella pallina era contratta dal freddo o dilatata dal calore.

Quando Galileo costruiva il primo termometro, l'ascensione dell'acqua nel cannello dell'istrumento era attribuita ad un orrore che la Natura avesse per lo spazio vôto; e quantunque l'idea che l'aria potesse pesare fosse già sorta nella mente dei fisici, purtuttavia la sua pressione era del tutto ignota. Quindi l'inventore del nuovo strumento non poteva conoscere che il movimento dell'acqua nel can-

nello del termometro era un effetto composto della pressione atmosferica e del calore del punto di osservazione, e che questo movimento potesse talune volte dare indicazioni opposte ai veri cangiamenti di temperatura. Ma dopochè Torricelli ebbe scoverta nel 1643 la pressione atmosferica, gli accademici del Cimento sottrassero il termometro dall'influenza della pressione atmosferica. Essi riempirono di acqua la pallina ed una porzione del tubo, che indi veniva ermeticamente chiuso nell'altra estremità: così l'acqua la quale serviva semplicemente da indice nel termometro di Galileo, divenne corpo termometrico in quello degli accademici. E poichè questo liquido gelandosi nell'inverno non di rado rompeva la pallina del termometro, essi vi sostituirono lo spitito di vino.

57. La prima condizione, a cui deve soddisfare qualunque strumento di misura, è quella di essere comparabile cogli altri strumenti della stessa specie; vale a dire che se da uno di essi abbiamo un dato valore numerico della grandezza sottoposta a misura, lo stesso valore numerico della medesima grandezza si deve ottenere da tutti gli altri strumenti consimili. Ed applicando al termometro questa regola generale, troviamo esser necessario, perchè le sue indicazioni siano utili, che quanti strumenti si vogliono di questa natura posti nelle medesime circostanze indichino una medesima quantità di calore: così da osservazioni eseguite in luoghi e tempi diversi il fisico potrà dedurre che il grado di calore sia stato identico o diverso.

Questa comparabilità del termometro non si può altrimenti ottenere che adattando all'istrumento una scala definita da due valori termici, invariabili per luogo e per tempo, e suscettibili di essere riprodotti a volontà del costruttore. Gli accademici del Cimento segnarono sui cannelli dei loro termometri dei punti ad eguali distanze per ottenere una certa determinazione di gradi di calore, ma la loro scala non avendo limiti invariabili era arbitraria ed in conseguenza inutile [1]. Carlo Renaldini propose per la

[1] Parecchi anni sono si rinvenne in Firenze una cassetta contenente taluni termometri costruiti dagli accademici del Cimento. Essi presentano una scala

prima volta nel 1693 la fusione del ghiaccio e l'ebollizione dell'acqua come temperature costanti su cui fondare la gradazione del termometro; Newton nel 1701 adottò gli stessi limiti nella costruzione del suo termometro ad olio di lino, e ne divise l'intervallo in 34 parti eguali o gradi. Più tardi Farenheit usò il mercurio come corpo termometrico, e ne stabilì una gradazione in 212 gradi compresa tra i limiti dell'acqua bollente e del freddo più intenso osservato a Danzica nel 1709 [1]. Nel 1730 Réaumur diede alla Francia il termometro ottantigrado, graduato tra i limiti della fusione del ghiaccio e del massimo aumento di volume che prima di bollire poteva prendere una mescolanza di 5 parti di spirito di vino rettificato del commercio ed una parte di acqua. Dopo varî tentativi egli ottenne questa ragione di miscela per soddisfare alla condizione che si era imposta nella costruzione del suo termometro; egli voleva che ogni grado della sua scala fosse la millesima parte della capacità della pallina più quella parte del tubo occupato dal liquido alla temperatura del ghiaccio fondente, quindi doveva cercare un liquido che tra questo grado di calore e quello prossimo al suo punto di ebollizione variasse in volume nella ragione di 1000 a 1080 [2]. Delisle, professore di Astronomia a Pietroburgo, costruì nel 1733 un termometro a mercurio, il cui zero indicava il calore dell'acqua bollente, e da questo punto a quello della fusione del ghiaccio s'interponevano 150 gradi. Egli pre-

divisa in 50 parti eguali; ed il sig. Libri comparando le loro indicazioni a quelle di un termometro ottantigrado a mercurio, ha trovato che lo zero dei termometri degli accademici corrisponde a —15° del termometro ottantigrado, ed il loro 50mo grado al 44° di quest'ultimo. Dimodochè i 50 gradi del termometro degli accademeci equivalgono a $44+15=59$ dell'ottantigrado; quindi ogni grado del primo è $\frac{59}{50}=1,18$ del secondo.

[1] La fusione del ghiaccio corrisponde al 32° di questo termometro.

[2] Comparando questo termometro, ch'è il vero di Réaumur a quello che in seguito, portando lo stesso nome perchè diviso in 80 gradi, ebbe per termini della sua gradazione la fusione del ghiaccio e l'acqua bollente, Deluc trovò che l'ottantesimo grado dell'antico termometro corrispondeva a 66°, 6 del nuovo termometro ottantigrado a mercurio.

ferì quest'ordine inverso di gradazione per distruggere il falso concetto che lo zero dei termometri rappresentasse l'assoluta privazione di calore; e quanto alla divisione in 150 gradi, questa venne in conseguenza delle sue ricerche sulla dilatazione del mercurio nei tubi di vetro. Egli voleva che ogni grado del suo termometro rappresentasse la dieci-millesima parte del volume del mercurio alla temperatura dell'acqua bollente, e partendo da questo principio trovava che dall'acqua bollente alla fusione del ghiaccio il mercurio si contraeva di 150 delle dieci-millesime parti [1]. Nel 1745 lo svedese Celsius diede il primo termometro a mercurio centigrado, vale a dire che la distanza tra la fusione del ghiaccio l'ebollizione dell'acqua era divisa in 100 parti eguali; e nel 1762 Deluc avvertì che nel segnare il punto di ebollizione bisognava notare sotto quale pressione atmosferica l'acqua bolliva, poichè dalle sperienze degli accademici del Cimento e da quelle di Boyle si rilevava che l'acqua bolle a diversi gradi di calore secondo che varia la pressione atmosferica. Alla medesima epoca si rapporta la prima idea di sostituire all'acqua bollente il suo vapore nel segnare il grado di ebollizione. Questa pratica fu suggerita dai membri della Società Reale di Londra, che dietro invito dello stesso Deluc furono incaricati di verificare le sperienze di Boyle circa l'influenza della pressione atmosferica sul grado di ebollizione dell'acqua; poichè essi osservarono che il livello del mercurio oscillava nell'acqua bollente; e restava al contrario tranquillo nel vapore che n'emanava.

Colle ricerche di Deluc si ebbe il numero compiuto delle condizioni necessarie alla comparabilità dei termometri. Ciò che i fisici posteriori indagarono sullo stesso argomento, non riguarda che

[1] Secondo le sperienze di Dulong e Petit il mercurio dalla fusione del ghiaccio all' acqua bollente si dilata nei tubi di vetro di $\frac{1}{64,8}$ del volumo primitivo. Quindi se rappresentiamo con 64,8 questo volume, alla temperatura dell'acqua bollente esso diverrà 65,8; e da questo secondo limite al primo la contraziono sarà in conseguenza di $\frac{1}{65,8} = 0,01519$, valore che appena differisce di circa 2 dieci-millesimi da quello che ottenne Delisle.

ma più esatta comparazione: tali sono le ricerche sull'influenza che possono avervi la natura del liquido termometrico e quella del vetro che lo racchiude; le avvertenze da tenersi nel determinare il punto del ghiaccio fondente; l'influenza che le sostanze sciolte nell'acqua e la natura dei recipienti possono avere sulla temperatura dell'ebollizione, ec. le quali ricerche esporremo in seguito. Restava però a risolvere un secondo problema, cioè se le intensità del calore erano o no proporzionali alle indicazioni termometriche: dimodochè chiamando a la quantità assoluta di calore (e ciò nell'ipotesi di un fluido-calore) posseduta dal corpo alla temperatura del ghiaccio fondente, ed α, α' le quantità termiche corrispondenti alle temperature t, t', si avesse la proporzione.

$$\alpha - a : \alpha' - a = t : t'.$$

Laplace, considerando che nei corpi aeriformi la coesione è nulla, poichè si mostrano animati da un'infinita ripulsione molecolare, congetturò che in essi la dilatazione per effetto di aumentato calore non solo dovess'essere per tutti la stessa; ma eziandio proporzionale alla quantità di aggiunto calore, poichè le loro molecole prive di reciproca tendenza, si dovevano ripellere proporzionatamente alle intensità delle forze motrici. In conseguenza chiamando v e v' i volumi di un gas alle temperature t e t', ed α, α' le corrispondenti quantità di calore, dovrebbe aver luogo la proporzione

$$v' : v = \alpha' ; \alpha ,$$

donde $$v' - v : v = \alpha' - \alpha ; \alpha.$$

Ma nell'ipotesi che il corpo termometrico sia formato dal gas, i volumi v e v' indicano le temperature t e t'; quindi

$$v' - v : v = t' - t : t;$$

dunque per un termometro a gas avrebbe luogo la proporzione

$$t' - t : t = \alpha' - \alpha : \alpha.$$

Or $t' - t$ è la differenza di temperatura, $\alpha' - \alpha$ è il calore ag-

giunto per passare dalla temperatura t alla temperatura t'; dunque nel termometro a gas le differenze di temperatura sarebbero proporzionali alle differenze di calore.

Bastava dunque assicurarsi che i fluidi aeriformi si dilatassero egualmente perchè l' ipotesi del fluido calore avesse condotto a riguardare il termometro ad aria come il vero misuratore dell'energia termica. Laplace invitò Gay-Lussac ad eseguire gli opportuni sperimenti; e questi rinvenne (ciò che già si conosceva per le ricerche primieramente di Volta e poi di Dalton) che tutti i gas si dilatano della stessa frazione del loro volume tra 0° e 100° del termometro centigrado. Così il termometro ad aria fu riguardato come il vero misuratore del calore; e tutte le volte che si è voluto determinare qualche legge della temperatura con una rigorosa precisione, i fisici hanno avuto cura di tradurre le indicazioni del termometro a mercurio in quelle che si sarebbero ottenute dal termometro ad aria.

Nella 1ª edizione di quest'opera io diceva a pag. 118. « Premesse queste nozioni » (cioè la definizione dell'idea di misura) essenziali elementi dell'idea di misura, è facile conoscere che la forza calorifera non può riceverne l'applicazione nello stato attuale delle cognizioni fisiche: non possiamo asserire che la quantità di calore di un corpo abbia un determinato rapporto colla quantità di calore di un altro corpo, come la teoria della gravità ci assicura che questa forza alla distanza di n raggi dal centro della terra è $\frac{1}{n^2}$. Infatti il solo fenomeno termico, che potrebbe offrire un mezzo di misura, essendo quello della dilatazione, sarebbe stato necessario assicurarsi degli aumenti di dimensione dei corpi proporzionali alle intensità del calore, senza alcuna dipendenza dalle indicazioni di qualsiasi termometro. Ma le prime ricerche sul valore delle dilatazioni dei corpi furono eseguite dietro le indicazioni del termometro a mercurio; si è dunque supposta la dilatazione apparente del mercurio proporzionale all'energia del calore, ipotesi interamente arbitraria. Seguirono d'appresso le scoverte di Gay-Lussac e di Dalton sull'eguale dilatabilità dei corpi aerifor-

mi; e poichè questi offrivano un coefficiente costante di dilatazione tra 0° e 100° del termometro a mercurio, i fisici immaginarono di aver trovato la vera misura del calore nel termometro ad aria, prendendo come unità di forza calorifera quella ch'è necessaria per aumentare di 0,00375 il volume di un gas alla temperatura 0°; e vieppiù si fermarono in questa idea, dopochè le sperienze di Dulong e Petit ebbero dimostrato che l'invariabilità del coefficiente di dilatazione si estendeva da — 36° a + 360° del termometro centigrado. Or la pretesa esattezza del termometro ad aria o poggia sopra una base ipotetica, ovvero è una pura petizione di principio. Ed in vero dall'eguale dilatabilità dei corpi aeriformi non può dedursi la proporzionalità della loro dilatazione all'intensità del calore, senza supporre la costituzione fisica dei gas, come risultante da un fluido introdotto tra le loro molecole, il quale avendo una volta equilibrato l'attrazione molecolare, deve aumentare di massa proporzionatamente alla quantità della dilatazione; ma dell'ipotetica esistenza di questo fluido la Termologia non ha più bisogno. Tolta poi questa base ipotetica, l'esattezza del termometro ad aria dipende da quella del termometro a mercurio, per mezzo del quale si è conosciuta l'invariabilità del coefficiente di dilatazione dei corpi aeriformi ».

« Il coefficiente di dilazione dei gas non può dunque offrire, riguardo all'energia del calore, una misura preferibile alle indicazioni del termometro a mercurio; nè conosciamo altro fenomeno termico che ne potesse presentare un metodo migliore. In tale stato della Termologia non resta a far altro che stabilire una misura ipotetica sulla proporzionalità della forza calorifera ai gradi di temperatura; tradurre fenomeni in linguaggio algoritmico; e se i risultati del calcolo si trovano di accordo con quelli dell'esperienza, il fisico avrà una dimostrazione indiretta della razionalità dell'ipotesi. Di già la *Teoria analitica del calore* ha dato risultati soddisfacenti riguardo alla distribuzione della forza calorifera nell'interno di un corpo solido omogeneo; e quando questa teoria potrà collegare tutti i fatti della Termologia, allora potremo conoscere con certezza, se l'ipotesi adottata sia traduzione di una legge naturale ».

Quando io colla sola forza della Logica trovava, come sopra, che il termometro ad aria non poteva riguardarsi come l'esatto misuratore del calore, io ignorava che Rudberg avesse pubblicato fin dal 1837 una memoria negli annali di Poggendorff, nella quale descriveva le sperienze che lo avevano condotto a riguardare come troppo grande la dilatazione che Gay-Lussac aveva assegnata all'aria; nè io conosceva le ricerche di Regnault che di pochi mesi precedevano la pubblicazione della mia opera, e dalle quali risultava che la quantità della dilatazione non solo è diversa pei differenti gas, ma ch'essa dipende ancora dalla pressione a cui sono sottoposti. L'esperienza aveva dunque sotto un'altra veduta già confermato ciò che per me non era che una semplice illazione.

L'invenzione di un termometro che rappresentasse nelle sue indicazioni i rapporti delle forze termiche non dovrebbe dunque dipendere dal fatto della dilatazione; e poichè non conosciamo altro fenomeno di calore che potesse offrire un mezzo di misura, la comparabilità delle indicazioni termometriche alle energie calorifere forse resterà sempre tra i desideri del fisico. Ma se eliminiamo dalla Fisica le oziose indagini sulla natura del calore, e specialmente l'ipotesi che ci fa riguardare i fenomeni termici come effetto di un fluido particolare, ipotesi che oggi nella scienza non serve che a far denominare *calorico* la cagione dei fenomeni calorifici, comprenderemo che questo bisogno è più immaginato che sentito. E quando la comparabilità dei termometri tra loro sia stata sì compiutamente attuata, che se a qualunque intervallo di tempo e di luogo due termometri abbiano indicato una stessa temperatura, il fisico possa avere il convincimento che le due intensità termiche erano eguali; allora la scienza possederà un misuratore di calore, soddisfacente per tutte le sue ricerche. Sotto questa veduta la Fisica è nella stessa condizione della Trigonometria: come questa definisce i valori degli angoli per mezzo di linee che non sono proporzionali alle quantità angolari, così la prima può dedurre l'energia del calore dai gradi termometrici, ancorchè questi non siano proporzionali alle intensità termiche.

CAPO SECONDO.

Misura delle dilatazioni.

58. La dilatazione prodotta dal calore si può considerare nelle tre dimensioni di un corpo, in due o finalmente in una sola: nel primo caso si avrà la *dilatazione cubica*, nel secondo *superficiale*, e *lineare* nel terzo.

Se il corpo ha in ogni punto della sua massa una coesione costante, come ciò ha luogo nei solidi amorfi non temperati e nei liquidi; o pure che la coesione vi sia nulla, come nei fluidi aeriformi, allora basterà conoscere una qualunque delle tre specie di dilatazione per poterne dedurre le altre due. Supponiamo, per esempio, data la dilatazione lineare per la differenza di 1° di temperatura, e che chiamiamo δ; l'unità di volume del corpo alla temperatura inferiore essendo rappresentata da 1, alla temperatura superiore di un grado avremo per espressione dello stesso volume

$$(1+\delta)^3 = 1 + 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3;$$

e poichè l'esperienza ha dichiarato che δ è una quantità piccolissima, specialmente pei corpi solidi e liquidi, così senza errore sensibile potremo trascurarne la 2ª e 3ª potenza, e 3δ esprimerà l'aumento dell'unità di volume per la differenza di un grado di temperatura. La dilatazione cubica è dunque tripla della dilatazione lineare: similmente si troverà che la dilatazione superficiale n'è doppia; e viceversa data la dilatazione cubica, la lineare ne sarà il terzo e la superficiale i $\frac{2}{3}$.

I corpi si dicono avere una dilatazione *uniforme* o *varia*, secondochè per ogni grado di temperatura, di cui venga aumentato il loro calore, essi si dilatano di una frazione costante o varia del loro volume preso ad una temperatura normale, a 0° per esempio. Questa frazione costante dicesi *coefficiente* di *dilatazione*; e poichè essendo uniforme la dilatazione cubica, tali ancora

saranno le superficiale e lineare; così il *coefficiente di dilatazione* riceve gli aggiunti *cubico*, *superficiale* e *lineare*. Nel caso poi di una dilatazione varia, a rigore non vi può essere coefficiente; purtuttavia si dà lo stesso nome a quel valore medio che si ottiene dividendo la dilatazione ottenuta in un certo intervallo di temperatura per la quantità di gradi che lo hanno definito; e calcolando con questo coefficiente medio la quantità di dilatazione che sarà prodotta da un'altra differenza di temperatura, non ci allontaneremo gran fatto dal vero, atteso il piccolo valore assoluto che la dilatazione ordinariamente presenta.

I corpi, che come i liquidi e gli aeriformi, debbono di necessità esser contenuti da recipienti, presenteranno sempre una dilatazione diversa dalla vera; poichè la variazione osservata del loro volume non ha potuto essere che la differenza tra la variazione che realmente ha avuto luogo e quella del loro recipiente. Se in un bagno caldo immergiamo un termometro, vedremo elevarsi il liquido che vi è contenuto; questo dunque si è dilatato. Ma mentre il liquido dilatandosi tendeva ad elevarsi nel cannello del termometro, il vetro, che lo racchiude, dilatandosi ancora, tendeva ad aumentare la capacità del recipieute, e quindi a far discendere il liquido: la dilatazione osservata non è stata dunque che la differenza di due dilatazioni progredienti in senso opposto. E l'opposta direzione di questi due movimenti può esser dichiarata da un semplicissimo esperimento. Ad un sottile tubo di vetro si saldi una pallina di qualche pollice di diametro: indi si riempia la pallina e buona parte del tubo con acqua o con altro liquido qualunque; ciò che si otterrà facilmente riscaldando la pallina colla fiamma di una lucerna a spirito di vino, e poi immergendo l'estremità del tubo nel liquido che si vuole introdurre: la pressione esterna dell'atmosfera divenuta così maggiore di quella dell'aria rarefatta della pallina, vi caccerà dentro il liquido in cui si è introdotto il tubo. Quando l'apparecchio siasi interamente raffreddato, s'immerga la pallina nel acqua bollente; e vedremo il liquido discendere prima nel tubo e poi salire. La discesa del liquido nel momento in cui non poteva essere ancora penetrato dal calo-

re, dichiara l'effetto che in esso produce la dilatazione del recipiente. Quindi è facilissimo comprendere perchè nei fluidi in generale si distinguono due specie di dilatazione, *l'apparente* e *l'assoluta*.

59. *Dilatazione dei solidi* — Dapprima gli accademici del Cimento, indi Muscenbroeck si occuparono della dilatazione dei solidi per effetto di aumentata temperatura; ma le loro sperienze buone per confermare la generalità della dilatazione, non erano state eseguite con quelle avvertenze che sono necessarie ad assicurare l'esattezza di una misura. Vennero in seguito le ricerche più accurate di Ellicot e Smeaton in Inghilterra, e poi di Lavoisier e Laplace in Francia. Le sperienze di questi due fisici francesi furono eseguite col metodo proposto la prima volta da Muscenbroeck; cioè quello di appoggiare un'estremità della verga, su cui si vuole sperimentare, ad un ostacolo invincibile, mentre coll'altro estremo preme il braccio minore di una leva, il cui braccio maggiore facendo da indice rende più sensibili le variazioni di lunghezza della verga. L'apparecchio, ch' essi usarono, è rappresentato dalla *fig.* 64 AB è una cassa rettangolare metallica posta sul fornello CD. In essa è adagiata la verga da sperimentare *st*, la quale è sostenuta da due rotoli di vetro annessi a due coppie di laminette *nn* della stessa sostanza. Queste laminette sono fermate a due spranghe *cb*, *cb*, sostenute da quattro pilastri situati in distanza dalla cassa. Alla spranga *fg* è fermata un'altra laminetta di vetro *ei*, contro cui appoggia l'estremità *s* della verga, la quale diviene immobile da questo lato, poichè la rotazione della lamina *ei* viene impedita dalla resistenza della traversa *m*. L'altro estremo *t* della stessa verga spinge contro l'estremo *z* della lamina *zh* anche di vetro, la quale fermata alla spranga *xy* che porta il cannocchiale *k*, fa rotare quest'ultimo intorno ad *xy*, quando l'azione del calore farà variare la lunghezza di *st*. Col cannocchiale si mira ad una linea verticale situata a 100 tese di distanza; e le proporzioni dell'apparecchio sono tali che quando la verga si allunga di una linea, il cannocchiale ne percorre 744 sulla linea di mira; quindi si renderà sensibile $\frac{1}{744}$ di linea. Le ver-

glie messe a pruova da Lavoisier e Laplace avevano sei piedi di lunghezza; dunque in esse era sensibile una differenza di $\frac{1}{744.6.144} = \frac{1}{637690}$ della lunghezza totale. La cassa AB era piena di acqua, la cui temperatura che si faceva variare da 0° fino al grado di ebollizione, era data da parecchi termometri, sui quali si poteva osservare anche il decimo di grado.

Dalle loro sperienze i due fisici francesi rilevarono — 1° che un corpo, la cui temperatura va da 0° all'acqua bollente e poi torna di nuovo a 0°, riacquista le sue prime dimensioni. — 2°. che tra questi medesimi limiti di temperatura il vetro ed i metalli, sottoposti ad esperimento, subirono dilatazioni proporzionali ai gradi di temperatura indicati dal termometro a mercurio — 3° che l'acciaio temperato presentò una dilatazione decrescente: ed è facile rendere ragione di questo fatto, considerando che l'acciaio temperato è meno denso e più dilatabile del non temperato. In conseguenza l'aumento di temperatura ricuocendo in parte questo metallo, ne diminuisce le dimensioni e la dilatabilità nel tempo stesso — 3° che i corpi composti hanno, come era da attendersi, un coefficiente di dilatazione che varia colla natura e proporzione dei loro elementi: il vetro ed il ferro del commercio ne offrirono soprattutto degli esempi.

Ecco i risultamenti delle loro ricerche.

Nomi delle sostanze	*Dilatazione lineare da 0° a 100°* *in decimali*	*in frazioni ordinarie.*
Fint-glass inglese	0,00081166 . .	1/1248
Vetro di Francia con piombo. . .	0,00087199 . .	1/1167
Tubi di vetro senza piombo . . .	0,00087572 . . .	1/1142
	0,00089760 . .	1/1114
	0,00091731 . .	1/1090
Acciaio non temperato	0,00107875 . .	1/927
	0,00107936 . .	1/926
Acciajo temperato giallo ricotto a 30° R. (dilatazione osservata fino 30°) .	0,00136900 . .	1/730
	0,00138600 . .	1/722
Acciaio ricotto a 65° R. . . . . (medesima osservazione) . .	0,00129300 . .	1/807
Ferro dolce lavorato alla fucina . .	0,00122045 . .	1/819
Ferro rotondo passato per filiera. .	0,00123504 . .	1/812
Oro puro	0,00146606 . .	1/682
Oro al titolo di Parigi, ricotto . .	0,00151361 . .	1/661
non ricotto	0,00155155 . .	1/645
Rame	0,00171222 . .	1/584
	0,00172244 . .	1/581
Ottone	0,00186671 . .	1/535
	0,00188971 . .	1/529
Argento al titolo di Parigi. . . .	0,00190868 . .	1/524
—— di copella :	0,00190974 . .	1/524
Stagno delle Indie o di Melac. . .	0,00193765 . .	1/516
Stagno di Falmouth	0,00217298 . .	1/462
Piombo.	0,00284836 . .	1/351

A questa tavola aggiungiamo la dilatazione dello zinco secondo Smeaton, e quella del platino ottenuta la prima volta da Borda

Zinco	0,00311 . . .	1/322
Platino.	0,00085655 . .	1/1157

Comparando inoltre i numeri di questa tavola di dilatazione a quelli di un'altra tavola che in seguito daremo sul grado di fusione dei medesimi corpi, si rileva che in generale i metalli sono tanto più dilatabili, per quanto sono più fusibili: così il platino, pressochè infusibile, dà il minimo valore di dilatazione. La stessa ta-

vola, dietro le sperienze di Dalton, offre novella pruova della dilatazione apparente dei liquidi; poichè questi, quando i loro recipienti vengono repentinamente riscaldati, discendono a dati eguali ad una profondità tanto più grande, per quanto è più dilatabile la sostanza dei loro recipienti.

Al metodo meccanico escogitato da Muscenbroek per ingrandire gli effetti della dilatazione lineare, Ramsden ne sostituì la misura diretta mediante un sistema micrometrico, evitando nel tempo stesso ogni errore di contatto, da cui sogliono essere affette le ricerche di questo genere. Il suo apparecchio si componeva di tre casse rettangolari parallele A, B, C (*fig.* 66): nella cassa di mezzo giaceva la verga metallica da mettersi a pruova; due verghe simili stavano nelle casse laterali. Ciascuna delle tre verghe aveva delle appendici perpendicolari, di cui quelle di A portavano i sistemi oculari di due microscopî, quelle di B ne avevano gli obbiettivi, ed al foco di questi stavano dei fili incrociati nelle appendici di C. Egli cominciava dal portare le tre verghe alla temperatura 0° circondandole di ghiaccio pesto: a questa temperatura restavano costantemente le verghe situate nelle casse estreme A e C; quella poi di B veniva gradatamente riscaldata col sottoporre alla cassa diverse lucerne. La dilatazione allontanava allora gli obbiettivi dagli assi degli oculari; ma regolarizzandoli da un lato, l'effetto della dilatazione era portato interamente sull'altro, ove veniva misurato dal movimento che doveva eseguire una vita micrometica per ridurre l'obbiettivo della corrispondente appendice a confondere il suo asse con quello dell'oculare. I valori così ottenuti da Ramsden di poco differiscono da quelli che prima di lui avevano trovato Lavoisier e Laplace.

Quando si conosce la dilatazione lineare, sappiamo che il triplo di essa esprime la dilatazione cubica; ma con questo metodo ogni errore avvenuto nel valutare la prima dilatazione resterà triplicato nel calcolare la seconda. Dulong e Petit hanno seguito un metodo inverso: dopo aver determinata la dilatazione apparente ed assoluta del mercurio, di cui parleremo in seguito, e che tra i li- 0° e 100° del termometro centigrado, trovarono la prima eguale

a $\frac{1}{64,8}$ e la seconda a $\frac{1}{55,5}$; essi sottrassero dalla 2.ª la 1.ª, ed ebbero la dilatazione cubica del vetro eguale a $\frac{1}{387}$ [1], di cui la terza parte $\frac{1}{1161}$ esprime la dilatazione lineare. Per conoscere poi la dilatazione dei metalli, in un cilindro di vetro chiuso in un estremo e pieno di mercurio secco alla temperatura del mezzo ambiente essi fermarono secondo l'asse del cilindro una verga di ferro. Indi adagiarono il cilindro in un bagno, che riscaldato ad un dato eccesso t di temperatura sul mezzo ambiante, fece uscire un peso P'' di mercurio ch'essi determinarono esattamente, come avevano determinato i pesi P e P' del mercurio e del ferro introdotti nel tubo di vetro. Chiamando D e D' la densità del mercurio e del ferro introdotti nel vetro, e D'' quella del mercurio alla temperatura con cui usciva dal tubo, i volumi del mercurio e del ferro al momento in cui furono messi nel vetro erano $\frac{P}{D}$ e $\frac{P'}{D'}$ e quello del mercurio uscito $\frac{P''}{D''}$; in conseguenza chiamando k il coefficiente di dilatazione del vetro, h quello del mercurio ed x quello del ferro, l' aumento del mercurio per l'accresciuta temperatura era $\frac{P}{D}ht$, quello del ferro $\frac{P'}{D'}tx$, e quello del cilindro di vetro, es-

[1] Chiamando d la dilatazione appareute del mercurio, D la sua dilatazione assoluta, k quella del vetro ed 1 il volume del mercurio alla temperatura 0°; il suo vero volume a 100° si otterrà aggiungendo al suo volume apparente $1+d$ l'aumento di capacità di quella porzione del recipiente occupata dal mercurio a 100° e che sarà espressa da $(1+d)\,k$; dimodochè il vero aumento D che il volume del mercurio ha ricevuto passando da 0° a 100° sarà dato da

$$D = d + k\,(1 + d), \text{ donde } k = \frac{D - d}{1 + d};$$

dunque la dilatazione cubica del vetro non è esattamente eguale alla dilatazione assoluta del mercurio meno la dilatazione appareute. Purtuttavia essendo il divisore $1+d$ poco differente da 1, l'errore che si fa trascurandolo, è pressochè insensibile; ed in vero calcolando esattamente k si ha $\frac{1}{392,7}$ in vece di $\frac{1}{387}$ trovato da Dulong e Petit, e la differenza di questi due valori è circa 0,0003.

sendo la sua capacità eguale alla somma dei volumi del mercurio e del ferro introdotti, era $\frac{P}{D} + \frac{P'}{D'}\ kt$. Or il volume del mercurio uscito rappresentando la differenza di queste dilatazioni, si ebbe per determinare x l'equazione

$$\frac{P}{D}\,ht + \frac{P'}{D'}\,xt - \left(\frac{P}{D} + \frac{P'}{D'}\right) kt = \frac{P''}{D''}.$$

Così essi determinarono la dilatazione cubica del ferro, che trovarono eguale a $\frac{1}{282}$ del volume a 0° per l'intervallo di temperatura tra 0° e 100. Rispetto poi ai metalli facili ad amalgamarsi col mercurio essi tennero un metodo proposto per la prima volta da Borda. Due verghe metalliche di figura parallelepida, e di eguale sezione e lunghezza, erano situate l'una a fianco dell'altra in una cassa piena di olio. Con un'estremità le due verghe poggiavano ad una traversa di ferro, e nell'altra portavavano un'asta di ottone che alzandosi dapprima verticalmente, si voltava poi in direzione orizzontale: una delle aste era divisa in quinti di millimetro, e l'altra che portava un nonio, faceva valutare i ventesimi di uu quinto, ossia i centesimi di millimetro. Fatta una delle verghe di ferro, di cui già conoscevano la dilatazione lineare, la differenza che osservavano tra questa e l'altra verga, faceva calcolare agevolmente la dilatazione lineare della seconda.

Con questo metodo Dulong e Petit studiarono la dilatazione del vetro, ferro, rame e platino, ed ottennero i risultamenti che seguono.

Intervallo di temperatura.	Dilatazione lineare per 1° centesimale.			
	Vetro	*Ferro*	*Rame*	*Platino*
Da 0° a 100°	0,00000863	0,00001182	0,00001718	0,00000884
— 0° a 300°	0,00001203	0,00001468	0,00001883	0,00000918

Da questi valori risulta che la dilatazione nei solidi non è uniforme, ma crescente col grado di temperatura; e le ricerche di Deluc sulla dilatazione del vetro avevano già dimostrato ch'essa non è uniforme neppure nell'intervallo da 0° a 100°.

Attesa l'utilità che può trarsi dall'esatta dilatazione del vetro in molte ricerche fisiche, notiamo nella seguente tavola i risultamenti delle più recenti sperienze.

DILATAZIONI CUBICHE DEL VETRO DA 0° A 100°.

Dulong e Petit	0,002 583
Despretz	0,002 580
Rudberg	0,002 286
Magnus.	0,002 547*
Regnault. Vetro bianco in tubi	0,002 648
—— — D° — soffiato in palla di 46mm di diam.	0,002 592
—— Vetro verde in tubi	0,002 299
—— D° — soffiato in palla di 36mm di diam.	0,002 132
—— Vetro di Svezia in tubi	0.002 363
—— D° — soffiato in palla di 34mm. di diam.	0,002 441
—— D° — di 32mm di diam.	0,002 411
—— D° — infusibile francese, in tubi.	0,002 142
—— D° — soffiato in palla di 32mm di diam.	0,002 242
—— Cristallo ordinario in tubi.	0,002 101
—— D° — soffiato in palla di 29mm di diam.	0,002 330
—— Pallone A delle sperienze	0,002 304
—— Pallone C delle sperienze	0,002 319

60. Per dedurre dalla dilatazione cubica la lineare e viceversa, è d'uopo supporre che nei cangiamenti di temperatura la figura del corpo, non ostante la variazione di volume, lasci sempre simile a se stessa. Or questa supposizione non è legittima che pei solidi i quali hanno una coesione uniforme in tutta la loro estensione. Fresnel osservò primieramente che in un cristallo di calce solfata la doppia rifrazione diminuiva coll'aumentare della temperatura; la qual cosa, come vedremo nell'Ottica, dichiarava un cangiamento notevole nella forma del cristallo. Più tardi Mitscherlich fece delle ricerche dirette su tale quistione; ed immergendo dei cristalli in un bagno di mercurio a diverse tempera-

ture e misurando con particolare goniometro l'inclinazione delle loro facce, trovò che realmente essa variava coi gradi di calore: così potè calcolare che nell'intervallo da 0° a 100° gli angoli ottusi delle facce romboidali di un cristallo di spato islandico diminuiscono di 8',30", e gli angoli acuti aumentano di altrettanto; dimodochè l'aumento della temperatura tende a far prendere al cristallo la forma cubica. Calcolandone sugli stessi dati la dilatazione lineare nel senso dell'asse, Mitscerlich la trovò di 0,00342, la quale, anche supponendo invariate le dimensioni perpendicolari all'asse, dava alla dilatazione cubica dello spato calcare un valore molto grande rispetto a quello degli altri corpi solidi. Per mettere a pruova questo risultamento di calcolo, egli e Dulong determinarono direttamente la dilatazione cubica dello spato. Essi posero dei cristalli di questa sostanza in un tubo di vetro, al quale ne saldarono un altro capillare; e riempirono il tubo di mercurio. Portando questo apparecchio da 0° a 100°, rilevarono dalla quantità di mercurio uscito dal tubo che lo spato si era dilatato di 0,001961 del suo volume a 0°. La grande differenza di questo numero dall'altro che si era ottenuto mercè i cangiamenti avvenuti nell'inclinazione delle facce, faceva arguire che il cristallo si fosse contratto in direzione perpendicolare all'asse. Mitscherlich prese una lamina di spato tagliata parallelamente all'asse, ed a diverse temperature misuratane la spessezza per mezzo di uno sferometro egli trovò che realmente questa diminuiva coll'aumento di calore ed aumentava pel raffreddamento. È d'uopo però avvertire che questo cangiamento di forma durante l'alterazione di volume prodotta dal calore, appartiene ai soli cristalli birifrangenti; mentre gli altri si dilatano come i solidi che hanno una coesione uniforme.

61. Se la forza di coesione è comparabile (n° 52) per mezzo della trazione ad una forza meccanica, a questo medesimo termine di paragone possiamo riferire la ripulsione molecolare del calore. Prendiamo ad esempio il ferro, e cerchiamo determinare a qual forza di trazione corrisponda l'allungamento di una verga di questo metallo sotto date dimensioni e per un dato aumento di

temperatura. Per fissare le idee supponiamo che la spranga avesse 10 metri di lunghezza, 15 centimetri quadrati di sezione, e che dalla temperatura 0° passasse a 300°. Essendo 0.00001468 il coefficiente della dilatazione lineare del ferro da 0° a 300°; sotto quest'ultima temperatura la spranga prenderà un aumento di lunghezza λ dato dall'equazione

$$\lambda = 10\text{m}.300.0,00001468 = 0\text{m},04404.$$

La spranga si allungherà dunque di circa 44 millimetri. Per trovare ora la quantità di peso che per trazione l'avrebbe allungata di altrettanto, prendiamo la formola data a pag. 108.

$$d = \frac{k}{e} \cdot \frac{l}{s},$$

nella quale rammentiamo che d esprime l'allungamento per trazione in millimetri, k è un peso in chilogrammi, e è il coefficiente di elasticità che pel ferro vale 20 chilogrammi, l è la lunghezza della spranga in metri, ed s è la sua sezione in millimetri quadrati. Quindi sostituendo in essa i numeri dell'esempio preso, avremo

$$44 = \frac{k}{20\,chi} \cdot \frac{10}{1500},$$

donde $k = 132000$ chilogrammi.

E poichè l'esperienza ha dichiarato (n°52) che il peso necessario ad allungare un corpo di certa quantità, è eguale a quello che premendolo lo accorcerebbe di altrettanto; così la spranga presa ad esempio avrebbe nel senso della lunghezza una forza di contrazione eguale a 132000^{chi}. Di questa prodigiosa potenza scoverta dalla Meccanica molecolare l'arte ha saputo trarre profitto. Due mura laterali di una galleria del Conservatorio di arti e mestieri a Parigi si erano inclinate sotto il peso di un solaio ch'esse sostenevano. Per restituirle alla verticale il sig. Molard le fece traversare da verghe di ferro terminate esteriormente da viti, le cui madreviti si appoggiavano a larghi scudi di ferro fuso che abbracciavano gran parte della faccia esterna delle mura. Metà delle ver-

ghe venne riscaldata mediante lampade ad esse sospese, ed in modo che si alternassero le barre fredde e le calde. Queste ultime che allungate pel calore permettevano che si stringessero vieppiù le madreviti, riducevano alquanto l'obbliquità delle mura quando venivano a contrarsi pel raffreddamento. L'operazione fu più volte ripetuta, e così si ebbero le mura perfettamente raddrizzate.

Ma la più importante ed ingegnosa applicazione dei coefficienti di dilatazione è senza dubbio quella del *pendolo compensatore*. Sappiamo (nº 37) che si può determinare la lunghezza del pendolo semplice sincrono ad un dato pendolo composto, e che per un pendolo semplice di lunghezza l il quale oscilli per archi piccolissimi, la durata θ di un'oscillazione è data dalla formola

$$\theta = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Or l'applicazione del pendolo all'orologio, e quindi alla misura del tempo richiede che θ sia costante; ciò che non può aver luogo sotto le variazioni annue e giornaliere della temperatura atmosferica, poichè variando l secondo i diversi gradi di calore, proporziole a $\sqrt{l}$ sarà il valore di θ. Prendiamo ad esempio il pendolo che batte i secondi a Parigi. La lunghezza di questo pendolo è stata trovata da Borda alla temperatura 0° ed a livello del mare di 993mm ,846147. Supponendo di ferro l'asta del pendolo, la sua lunghezza alla temperatura di 30° diverrà

$$993^{mm},846147\ (1+0,00001182\times 30).$$

Quindi tra la durata θ di un'oscillazione alla temperatura 0° e la durata θ' di un'oscillazione a 30° si avrà la relazione

$$\theta : \theta' = 1 : \sqrt{1+0,00001182\times 30} = 100000 : 100017.$$

Ed essendo le rispettive quantità di oscillazioni N ed N', fatte in un medesimo tempo, inversamente proporzionali alle loro durate θ e θ', avremo

$$N' : N = 100000 : 100017\ ,$$

donde

$$N' = N\,\frac{100000}{100017}.$$

Facendo N = 86164″ che compongono il giorno siderale, avremo N′ = 86149″,3. Dunque il pendolo che a Parigi batte i secondi alla temperatura 0° ritarderebbe in un giorno siderale di circa 15″ alla temperatura di 30°; errore considerevole rispetto all'esattezza che richieggono le osservazioni astronomiche.

Il primo modo di compensazione ed il più semplice al tempo stesso fu quello immaginato da Graham celebre orologiaro inglese, e che tuttavia si osserva applicato a qualche pendolo. Questo modo di compensazione consiste nel sostituire alla lente, che suole trovarsi nell'estremità inferiore della verga del pendolo, un vase cilindrico di vetro in gran parte pieno di mercurio, come rappresenta la *fig.* 67. Quando il calore dilata la verga e tende a far discendere il centro di oscillazione del pendolo, per un effetto analogo il mercurio si eleva nel cilindro di vetro e tende a farlo salire. Per una prima approssimazione si comincia dal supporre, che il centro di oscillazione sia lo stesso che il centro di gravità del cilindro di mercurio; ed in questa ipotesi, che non si allontana molto dal vero, chiamando l la distanza del punto di sospensione dalla base del cilindro di mercurio, ed α il coefficiente di dilatazione del ferro, di cui è formato il pendolo, il centro di gravità del mercurio per l'aumento di un grado di temperatura discenderà della quantità $l\alpha$. Daltronde chiamando l' l'altezza del mercurio nel cilindro di vetro, la distanza del suo centro di gravità dalla base sarà $\frac{1}{2}l'$, e denominando α' il coefficiente di dilatazione apparente del mercurio, il suo centro di gravità per l'aumento di un grado di temperatura si eleverà di $\frac{1}{2}l'\alpha'$. Quindi per esservi compensazione, dovrà essere

$$l\alpha = \tfrac{1}{2}l'\alpha';$$

donde

$$l' : l = \alpha : \tfrac{1}{2}\alpha'.$$

Or sappiamo che $\alpha = 0{,}00001182$, ed in seguito vedremo essere $\alpha' = 0{,}00015432$: sostituendo questi numeri nella proporzione precedente, troveremo $l' = 0{,}15$ circa di l. Ottenuto così un primo valore approssimato, si perverrà poi ad una soddisfacente

compensazione togliendo ed aggiungendo delle piccole quantità di mercurio.

Nel 1738 Leroy in Francia propose il primo pendolo a compensazione interamente solido; e quantunque il suo sistema sia stato abbandonato, purtuttavia in esso sta il principio del pendolo a compensazione, quale oggi suol costruirsi. Immaginiamo un rettangolo *abdc* (*fig.* 69) fatto di sottili verghe di ferro, e sospeso mediante l'asta *op* dello stesso metallo. Sulla base *bd* del rettangolo si elevano due colonnette di ottone *fh*, *gt* unite dalla traversa *fg* alla quale per mezzo dell'asta di ferro *nm* è sospesa la lente *m* del pendolo. Incominciando, come nel caso precedente, dal supporre il centro di oscillazione nel centro *m* di gravità della lente, osserviamo che la sua distanza L dal punto di sospensione *o* (facendo $op = a$, $ab = b$, $nm = c$, $fh = l$) è data dall'equazione

$$L = a + b + c - l.$$

Chiamando α il coefficiente della dilatazione lineare del ferro, ed α' quello dell'ottone; è chiaro che per l'aumento di un grado di temperatura la somma delle tre verghe di ferro aumenterà di $(a + b + c)\alpha$, e ciascuna colonnetta di ottone di $l\alpha'$; quindi perchè restasse invariata la lunghezza del pendolo, è d'uopo che si abbia

$$(a + b + c)\alpha = l\alpha' ;$$

ma $a + b + c = L + l$; quindi sostituendo avremo

$$(L + l)\alpha = l\alpha' ,$$

donde

$$l = \frac{L\alpha}{\alpha' - \alpha} ;$$

e rilevandosi dalla tavola dei coefficienti di dilatazione che α' è circa $\frac{5}{3}\alpha$, si ha

$$l = \frac{L\alpha}{\alpha\left(\frac{5}{3} - 1\right)} = \frac{3}{2} L.$$

È dunque impossibile ottenere compensazione mediante due sole coppie di verghe, l'una di ferro e l'altra di ottone. Ma se alla traversa *fg* (*fig.* 68) che unisce le due colonnette di ottone *fh* e *gt*, sospendiamo un secondo telaio di verghe di ferro *svre*, e quindi un'altro di ottone *quxy*, al quale sospendiamo la lente *m* per mezzo della verga di ferro *zm*, potremo attuare la relazione dataci dall'equazione precedente. Conservando le notazioni del primo sistema, e facendo $sv = a'$, ed $uq = l'$, l'allungamento prodotto da un grado di calore nel sistema delle verghe di ferro sarà $(a + b + c + a')x$, e $(l + l')\alpha'$ in quelle di ottone; e la compensazione richiederà

$$(a + b + c + a')x = (l + l')\alpha',$$

Ma $a + b + c + a' = \mathrm{L} - l - l'$; dunque

$$(\mathrm{L} - l - l')\,\alpha = (l + l')\,\alpha',$$

donde

$$l + l' = \frac{\mathrm{L}\alpha}{\alpha' - \alpha} = \frac{3}{2}\,\mathrm{L},$$

e

$$2\,(l + l') = 3\,\mathrm{L}.$$

Basta dunque che la somma delle lunghezze delle colonnette di ottone eguagli tre volte la lunghezza del pendolo, perchè si abbia un'approssimata compensazione, che si renderà poi esatta per mezzo di ripetuti sperimenti.

Per meglio dichiarare la composizione dell'apparecchio abbiamo supposto i diversi pezzi separati l'uno dall'altro, ma realmente essi sono congiunti come rappresenta la *fig.* 75.

Rispetto poi agli oriuoli a molla l'uniformità del movimento si ottiene per mezzo di lamine compensatrici.

Supponiamo due lamine piane A e B (*fig.* 73) di diverso metallo, l'una sovrapposta e l'altra, e fermate nei loro estremi. Se la temperatura aumenta, la lamina più dilatabile aumentando di lunghezza in paragone dell'altra, obbligherà il sistema ad incurvarsi situandosi essa dal lato della convessità (*fig.* 71): viceversa il sistema diverrà concavo dal lato della lamina più dilatabile ed

in conseguenza più contrattile, quando la temperatura verrà a diminuire. Questo fatto è reso evidente da un semplicissimo apparecchio: *ab* (*fig.*78) è una doppia lamina di zinco e ferro, la quale coll'estremo *a* tocca un indice mobile sulla circonferenza di un arco graduato. Secondochè l'apparecchio verrà immerso in un bagno caldo o freddo, il diverso movimento dell'indice farà conoscere le opposte inflessioni della lamina di zinco, metallo assai più dilatabile del ferro.

Ciò posto, è noto che negli oriuoli a molla il movimento è regolato da un bilanciere, che l'azione di una piccola spirale elastica fa oscillare intorno al suo asse. Secondochè la temperatura aumenta o diminuisce, il centro di oscillazione del bilanciere divenendo più o meno distante dall'asse, ne rende più o meno ritardato il movimento. Per ottenere delle oscillazioni costantemente isocrone si sostituiscono alla circonferenza, che suole terminare i due diametri del bilanciere, le lamine compensatrici *ab* (*fig.* 70) le quali ravvicinano all'asse il centro di oscillazione, quando l'aumento di temperatura tende ad allontanarlo, e viceversa. Si aggiungono inoltre le palline *m*, che mentre conservano nell'asse di rotazione il centro di gravità del sistema, offrono il mezzo di meglio regolare la compensazione.

62. *Dilatazione dei liquidi*. Questa, come sappiamo, può essere apparente o assoluta. Per determinare la prima si prenda un tubo di vetro esattamente cilindrico, diviso in parti di eguale capacità e terminato in un estremo da una pallina della stessa sostanza. Si pesi il tubo vôto, indi si torni a pesare dopo averlo pieno di mercurio fino all' origine delle divisioni: la differenza dei due pesi farà conoscere quello del mercurio contenuto nella pallina e nella porzione indivisa del tubo. Si aggiunga nuovo mercurio che occcupi un certo numero di divisioni, e si torni a pesare una terza volta: la differenza tra la terza e la seconda pesata sarà il peso del mercurio contenuto nelle *n* divisioni del tubo da esso occupato; ed il quoziente di questa differenza divisa per *n*, darà il peso del mercurio contenuto in una sola divisione. È evidente che il rapporto tra il peso del mercurio contenuto nella pallina e quello del mer-

curio contenuto in una divisione del tubo esprimerà il rapporto della capacità della pallina a quella di una divisione; quindi prendendo ad unità la capacità di una divisione, avremo l'espressione numerica della capacità della pallina.

Il tubo così preparato si empirà fino ad un certo numero di divisioni del liquido, di cui si vuol conoscere la dilatazione apparente; ed esponendo la pallina alla fiamma di una lucerna a spirito di vino si farà bollire il liquido per un tempo sufficiente ad espellerne tutta l'aria che colla sua presenza ne ingrandirebbe la dilatazione; indi alla lampada dello smaltatore si chiuderà l'estremità libera del tubo, affinchè l'evaporazione non diminuisca la quantità del liquido. Ciò fatto, si circonderà il tubo di ghiaccio pesto fino all'estremità superiore della colonna liquida, ed avremo così il suo volume v alla temperatura 0°; poi si passerà in un bagno, la cui temperatura elevata fino a 100° ci darà il volume v' del liquido al grado normale dell'acqua bollente: la differenza $v' - v$ dei due volumi osservati esprimerà il valore assoluto della dilatazione apparente, e $\frac{v' - v}{v}$ n'esprimerà il valore relativo al volume a 0°. Con un metodo simile Lavoisier e Laplace determinarono la dilatazione apparente del mercurio che trovarono di $\frac{1}{63}$ del volume a 0°.

Dulong e Petit seguirono un metodo differente, capace di dare risultamenti più esatti. Essi empirono di mercurio ben secco ed alla temperatura 0° un cilindro di vetro terminato da un sottile tubo ricurvo. Posero verticalmente il cilindro in un bagno che riscaldarono da 0° a 100° e raccolsero in una vaschetta il mercurio che la dilatazione espelleva dal tubo. Pesarono il mercurio residuo e quello uscito dal tubo; e chiamando P il primo peso e p il secondo, è chiaro che la dilatazione apparente, e relativa al volume a 0°, era data dalla frazione $\frac{p}{P}$ ch'essi trovarono eguale a $\frac{1}{64,8}$. È d'uopo però avvertire che la dilatazione non essendo la stessa per tutte le qualità di vetro, il valore $\frac{1}{64,8}$ non è esatto che per la specie di vetro adoperata da Dulong e Petit.

63. Le dilatazioni assolute dei liquidi si sono ottenute mediante l'applicazione di due principî idrostatici. Uno di questi principî, che riguarda l'equilibrio dei liquidi nei tubi comunicanti, proposto per la prima volta da Boyle, è stato seguito da Dulong e Petit per determinare la dilatazione assoluta del mercurio; l'altro relativo all'equilibrio dei solidi nei liquidi è stato seguito da Hallström per misurare la dilatazione assoluta dell'acqua.

Dulong e Petit presero un tubo di vetro ACB (*fig.* 74) voltato due volte ad angolo retto, e fatto da due cilindri di eguale diametro A e B, uniti da un tubo capillare *mCn*. Pieno di mercurio il tubo, e fermate verticalmente le due braccia, il liquido si elevava in esse ad uno stesso livello, finchè avevano un'eguale temperatura. Ma se il braccio A conservava tuttavia una temperatura costante, mentre B veniva gradatamente riscaldato, allora il mercurio si elevava in B più che in A, poichè il piccolo diametro del tubo di comunicazione *mCn* impediva la produzione delle correnti che trasportando il mercurio caldo in A ed il freddo in B, ne avrebbero eguagliato il livello. Ed una legge idrostatica, che dichiareremo nel libro seguente, faceva conoscere che le altezze k e k' del mercurio nelle due braccia A e B erano inversamente proporzionali alle densità corrispondenti d e d', ossia

$$k' : k = d : d'.$$

Ma ad unità di massa essendo le densità dei corpi inversamente proporzionali ai loro volumi, si avrà

$$d : d' = v' : v ;$$

ed eliminando tra le due proporzioni il rapporto comune di $d : d'$, si ottiene

$$v' : v = k' : k ,$$

donde
$$\frac{v' - v}{v} = \frac{k' - k}{k}.$$

v' indicando il volume dell'unità di massa del mercurio alla temperatura t a cui veniva elevato il braccio B, v il simile volume del

mercurio che restava in A alla temperatura 0°; $v' - v$ esprimerà la dilatazione assoluta del mercurio, da 0° *a* t°, e $\frac{v'-v}{v}$ la stessa quantità espressa in frazione del volume a 0°. Or l'equazione precedente dimostra che per ottenere quest'ultimo rapporto, basta misurare esattamente le altezze k e k' delle due colonne di mercurio sul livello della base C.

L'apparecchio usato dai fisici francesi, è rappresentato dalla (*fig.* 79) ABCD è il tubo disopra descritto: esso poggiava sopra una spranga di ferro SS', la quale giaceva sopra una tavola sostenuta da quattro viti destinate a poter situare orizzontalmente la base BC del tubo. Due aste verticali di ferro, ne fissavano la posizione. Il braccio AB era circondato dal cilindro MN pieno di ghiaccio pesto, perchè si fosse conservato alla temperatura costante 0°; e l'altro braccio CD si trovava in una caldaia cilindrica piena di un olio fisso che senza bollire poteva tollerare la temperatura di oltre 300°. La temperatura della caldaia era data da due termometri, l'uno i ad aria, e di questo parleremo in seguito; l'altro t era un termometro a peso, simile a quello che aveva fatto conoscere la dilatazione apparente del mercurio. Si determinava il peso p del mercurio uscito dal tubo, ed il peso P di quello che vi era restato; la frazione $\frac{p}{P}$ conteneva tante volte il coefficiente di dilatazione apparente $\frac{1}{6480}$ per quanti erano i gradi di temperatura superiori a 0°; quindi il numero x di questi gradi veniva dato dall'equazione

$$\frac{p}{P} = \frac{x}{6480}.$$

In tal modo Dulong e Petit trovarono che il mercurio per ogni grado del termometro centigrado si dilata

da 0° a 100° di $\frac{1}{5550}$

da 100° a 200° di $\frac{1}{5425}$

da 200° a 300° di $\frac{1}{5300}$.

Il secondo metodo, che abbiamo indicato, poggia sul principio idrostatico che un solido immerso in un liquido vi perde tanto del suo peso, quanto è quello del volume liquido ch'esso discaccia. Ciò posto, porremo il liquido su cui vorremo sperimentare, in un recipiente che porteremo a diverse temperature; e ad ogni variazione termometrica determineremo mediante una sensibile bilancia la perdita di peso che vi farà un solido immerso, di cui conosciamo il coefficiente di dilatazione cubica. Supponiamo una prima pesata a 0° ed un'altra alla temperatura t; e sia p la perdita di peso fatta dal solido nel 1° caso, e p' nel secondo. Se il solido avesse conservato un volume costante, i pesi p e p' apparterrebbero a due volumi liquidi eguali e di diversa densità; ma nel passare da 0° a t gradi il solido, di cui supponiamo α il coefficiente di dilatazione cubica, si è dilatato nel rapporto di $1 : 1 + \alpha t$, quindi nel medesimo rapporto si è aumentata la perdita di peso. Perciò se il solido avesse conservato alla temperatura t il volume che aveva a 0°, la perdita di peso sarebbe stata $\frac{p'}{1+\alpha t}$. Dunque alle temperature 0° e t i pesi di due volumi eguali di liquido, ed in conseguenza le densità, sono nella ragione $p : \frac{p'}{1+\alpha t}$. Ma queste densità d e d' sono in ragione inversa dei volumi v e v' che una medesima massa di liquido avrebbe occupato alle temperature 0° e t; dunque

$$v' : v = p : \frac{p'}{1+\alpha t},$$

donde è facile dedurre

$$\frac{v'-v}{vt} = \frac{p(1+\alpha t)-p'}{p't}.$$

Or $\frac{v'-v}{vt}$ indicando di qual frazione del volume a 0° il liquido si è dilatato per ogni grado nel passare da 0° a t, esprime il coefficiente della dilatazione cubica assoluta del liquido; dunque questo coefficiente si può ottenere dalle perdite p e p' che ha sofferto il peso di un solido immerso nel liquido alle temperature 0° e t.

Sperimentando con questo metodo su diversi liquidi, la frazione $\frac{p(1+\alpha t)-p'}{p't}$ presenterà valori differenti non solo secondo la diversa natura del liquido, ma ancora secondochè t indicherà una temperatura più o meno distante dal grado di ebollizione del liquido; ed in generale, come t si approssima a questo grado, la dilatazione si troverà crescere più rapidamente della temperatura indicata dal termometro a mercurio. La stessa conseguenza si dedurrà ancora dalla seguente tavola in cui sono notati i risultamenti delle sperienze che Deluc eseguiva nel 1794 sui gradi comparativi di calore indicati da diversi termometri costruiti con liquidi differenti. I loro tubi erano perfettamente calibri; i liquidi erano stati ben purgati di aria; e sopra ciascun termometro i limiti della scala, 0° e 80°, erano stati determinati mediante la fusione del ghiaccio e l'ebollizione dell'acqua.

Mercurio	Olio di oliva	Olio essenz. di camomil.	Olio essenz. di serpillo.	Acqua saturata di sal comune.	Alcool purissimo.	Tre parti di alcool ed una di acqua.	Parti eguali di alcool ed acqua.	Una parte di alcool e tre di acqua.	Acqua.
80	80	80	80	80	80	80	80	80	80.
75	74,6	74,7	74,3	74,1	73,8	73,7	72,4	71,6	71,0
70	69,4	69,5	68,8	68,4	67,8	67,5	64,3	62,9	62,0
65	64,4	64,3	63,5	62,6	61,9	61,5	56,6	55,2	53,5
60	59,3	59,1	58,3	57,1	56,2	55,8	49,5	47,7	45,8
55	54,2	53,9	53,3	51,7	50,7	50,2	42,5	40,6	38,5
50	49,2	48,8	48,3	46,6	45,3	44,9	36,2	34,4	32,0
45	44,0	43,6	43,4	41,2	40,2	39,7	30,1	28,4	26,1
40	39,2	38,6	38,4	36,3	35,1	34,8	24,6	23,0	20,5
35	34,2	33,6	33,5	31,3	30,3	29,8	19,9	18,0	15,9
30	29,3	28,7	28,6	26,3	25,6	25,2	15,3	13,5	11,2
25	24,3	23,8	23,8	21,9	21,0	20,7	11,2	9,4	7,3
20	19,3	18,9	19,0	17,3	16,5	16,2	7,7	6,1	4,1
15	14,4	14,1	14,2	12,8	12,2	11,8	4,9	3,4	1,6
10	9,5	9,3	9,4	8,4	7,9	7,7	2,3	1,5	0,2
5	4,7	4,6	4,7	4,2	3,9	3,8	0,9	0,1	— 0,4
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
— 5				— 4,1	— 3,9				
—10				— 8,0	— 7,7				

Quantunque i numeri segnati in questa tavola si rapportino alla dilatazione apparente dei liquidi, purtuttavia osserviamo che se le dilatazioni assolute dei liquidi contenuti nei diversi termometri avessero avuto una legge comune, un accordo soddisfacente avrebbe dovuto risultarne tra le indicazioni termometriche. Or la tavola ci fa conoscere che quando il termometro a mercurio segnava 30°, per esempio, gli altri segnavano 29.3, 28.7, 28.6, 26.5, 25.6, 25.2, 15.3, 13.5, 11.2. La minima divergenza si osserva nel termometro ad olio di oliva, la massima in quello ad acqua. E poichè i diversi termometri si accordavano nei limiti 0° e 80°, dobbiamo conchiudere che prendendo a termine di paragone la dilatazione assoluta del mercurio, quelle degli altri liquidi formano una serie crescente, la cui massima rapidità ha luogo nell'acqua.

Osserviamo inoltre che il termometro ad acqua ha presentato una massima contrazione a 5 gradi del termometro a mercurio; la qual cosa doveva necessariamente avvenire per una proprietà che l'acqua ha comune con tutti i corpi liquidi che solidificandosi cristallizzano. Il bismuto, per esempio, nel divenir solido rompe i tubi di vetro in cui è stato fuso: la precisione con cui il ferro fuso riproduce le forme in cui è gittato, dipende ancora dalla stessa proprietà; e l'acqua gelandosi fa scoppiare i recipienti che la chiudono. Questo liquido deve dunque presentare una contrazione massima prima di giungere al limite 0°, in cui suole ordinariamente congelarsi. E poichè tutte le grandezze che sottoposte alla legge di continuità (e la contrazione prodotta dal raffreddamento va in questa categoria) sono capaci di un valore massimo o minimo, debbono presentare variazioni minime nei luoghi prossimi al massimo o al minimo [1]; così intendiamo perchè nella tavola precedente la massima divergenza dalle temperature indicate dal termometro a mercurio si trova in quelle del termometro ad acqua e nei termometri a spirito di vino mescolato a grande proporzione di acqua.

64. Quantunque la contrazione massima osservata nel termome-

[1] Ved. la nota (F).

tro ad acqua ad una temperatura superiore a 0° sia una conseguenza della costituzione fisica di questo liquido; purtuttavia sarebbe falso il dire che l'acqua prende il minimo volume alla temperatura indicata dal termometro a mercurio, quando il termometro ad acqua presenta la massima contrazione; poichè questa non è che apparente, stante il contemporaneo restringimento del vetro. Se chiamiamo v il volume dell'acqua a 100° ed α, α', α'',... $\alpha^{(n)}$ le diminuzioni piccolissime e decrescenti (poichè le dilatazioni sono crescenti), che successivamente riceve il suo volume per eguali e minimi intervalli di temperatura, avremo che dopo n intervalli il volume dell'acqua sarà

$$v - (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots \alpha^{(n-1)});$$

e la capacità del tubo che a 100° era v, dopo gli n intervalli sarà divenuta

$$v - n\,B,$$

B disegnando una diminuzione costante di capacità, poichè la dilatazione del vetro tra 0° e 100° è proporzionale alla temperatura indicata dal termometro a mercurio. Pei primi termini della serie degl'intervalli, α è più grande di B, quindi l'acqua discende nel tubo: ma B è costante, poichè rappresenta una frazione del coefficiente di dilatazione del vetro tra 0° e 100° ed i valori di α formano una serie decrescente nella quale si ha $\alpha = 0$, quando l'acqua giunge alla massima densità; dunque vi sarà necessariamente un numero n d'intervalli di temperatura che renderà

$$\alpha^{(n-1)} = B,$$

ed allora l'acqua presenterà il minimo volume apparente. Negli intervalli successivi $n + 1$, $n + 2$, ec. i valori di $\alpha^{(n)}$, $\alpha^{(n+1)}$ ec. divenendo sempre più piccoli, mentre B è costante, avremo

$$\alpha^{(n)} < B,$$

e quindi il volume apparente aumenterà, mentre il volume reale diminuisce. Donde segue che la temperatura, a cui corrisponde il minimo volume apparente dell'acqua, è sempre maggiore di quella a cui corrisponde il minimo volume reale.

Dalla stessa formola $\alpha(n-1) = B$ segue ancora che aumentando B, vale a dire componendo di una sostanza più dilatabile il tubo termometrico che deve racchiudere l'acqua, decrescerà il numero n d'intervalli necessari a rendere $\alpha(n-1) = B$, e quindi la massima contrazione apparente avverrà a temperature più vicine a 100°, ed in conseguenza più elevate sopra 0°. Secondo le sperienze di Dalton l'acqua in tubi di flint-glass, ferro, rame, ottone, stagno e piombo presenta la massima contrazione alle temperature 4°.222, 4°. 667, 6°. 222, 6°. 664, 7°. 778; e dalla tavola dei coefficienti dei solidi si rileva che la dilatazione va crescendo dal flint al piombo.

Per ottenere la temperatura corrispondente alla massima densità dell'acqua, è dunque necessario che i risultamenti dell'esperienza siano corretti dell'effetto prodotto dalla contrazione del recipiente. Ecco ciò che ha fatto Despretz in questi ultimi tempi sperimentando sopra termometri ad acqua; e dalla discussione di tutte le sue sperienze egli ha dedotto che la temperatura corrispondente alla massima densità di questo liquido è di 3°,997 centigradi, vale a dire prossimamente 4°. E prendendo come unità il volume e la densità a quest'ultima temperatura, egli ne ha calcolato i volumi e le densità da — 9° a + 100°, quali vengono notati nella seguente tavola.

Temp.	Volumi.	Densità.	Temp.	Volumi.	Densità.
— 9	1,0016311	0,998371	46	1,01020	0,989903
— 8	1,0013734	0,998628	47	1,01067	0,989442
— 7	1,0011354	0,998863	48	1,01109	0,989032
— 6	1,0009184	0,999082	49	1,01157	0,988562
— 5	1,0006987	0,999302	50	1,01205	0,988093
— 4	1,0005619	0,999437	51	1,01248	0,987674
— 3	1,0004222	0,999577	52	1,01297	0,987196
— 2	1,0003077	0,999692	53	1,01345	0,986728
— 1	1,0002138	0,999786	54	1,01395	0,986243
0	1,0001269	0,999873	55	1,01445	0,985756
1	1,0000730	0,999927	56	1,01495	0,985270

Temp.	Volumi.	Densità.	Temp.	Volumi.	Densità.
2	1,0000331	0,999966	57	1,01547	0,984706
3	1,0000083	0,999999	58	1,01597	0,984281
4	1.0000000	1,000000	59	1,01647	0,983708
5	1,0000082	0,999999	60	1,01698	0,983303
6	1,0000309	0,999969	61	1,01752	0,982782
7	1,0000708	0,999929	62	1,01809	0,982231
8	1,0001216	0,999878	63	1,01862	0,981720
9	1.0001879	0,999812	64	1,01913	0,981229
10	1,0002684	0,999731	65	1,01967	0,980709
11	1,0003598	0,999640	66	1,02025	0,980152
12	1,0004724	0,999527	67	1,02085	0,979576
13	1.0003862	0,999414	68	1,02144	0,979010
14	1,0007146	0,999285	69	1,02200	0,978473
15	1,0008751	0,999125	70	1,02255	0,977947
16	1,00 0215	0,998979	71	1,02315	0,977373
17	1,0012067	0,998794	72	1,02375	0,976800
18	1,00139	0,998612	73	1,02440	0,976181
19	1,00158	0,998422	74	1,02499	0,975619
20	1,00179	0,998213	75	1.02562	0,975018
21	1,00200	0,998004	76	1,02631	0,974364
22	1,00222	0,997784	77	1,02694	0,973766
23	1,00244	0,997566	78	1,02761	0,973132
24	1,00271	0.997297	79	1,02823	0,972545
25	1,00293	0,997078	80	1,02885	0,971959
26	1,00321	0,996800	81	1,02954	0,971307
27	1,00343	0,996562	82	1,03022	0,970666
28	1,00374	0,996274	83	1,03090	0,970027
29	1,00403	0,995986	84	1,03136	0,969465
30	1,00433	0,995688	85	1,03225	0,968757
31	1,00463	0,995391	86	1,03293	0,968120
32	1,00494	0,995084	87	1,03361	0,967483
33	1,00525	0,994777	88	1,03430	0,966837
34	1,00555	0,994480	89	1,03500	0,966183
35	1,00593	0,994104	90	1,03566	0,965567
36	1,00624	0,993799	91	1,03639	0,964887
37	1,00661	0,993433	92	1,03710	0,964227
38	1,00699	0,993058	93	1,03782	0,963558
39	1,00734	0,992713	94	1,03852	0,962908
40	1,00773	0,992329	95	1,03925	0,962232
41	1,00812	0,991945	96	1,03999	0,961547
42	1,00853	0,991542	97	1,04077	0,960827
43	1,00894	0,991139	98	1,04153	0,960128
44	1,00938	0,990707	99	1.04228	0,959434
45	1,00985	0,990246	100	1,04315	0,958634

Se l'acqua tenesse qualche sale in soluzione, a sua massima densità corrisponderebbe ad una temperatura inferiore a 4°. Erman deduceva dalle sue sperienze che l'acqua di mare non ha un *massimo* di densità, perchè la vedeva continuamente contrarsi fino al grado di congelazione. Queste sperienze sono state ripetute da Despretz, il quale chiudendo l'acqua di mare in tubi da termometro, in cui può discendere di molti gradi sotto il suo punto di congelazione senza divenir solida, ha trovato ch'essa presenta una densità massima ad una temperatura inferiore a quella della sua congelazione. Egli ha esteso le sue ricerche a diverse soluzioni ed ha ottenuto i risultamenti che seguono.

Sostanze.	Densità.	Peso della sostanza su 997,45 di acqua.	Temperatura del massimo.	Punto di congelazione.	Temperatura durante la congelazione.
Acqua di mare ..	1,027	«	— 3°,67	— 2°.55	— 1°,88
Cloruro di sodio .	1,009	12,346	+ 1 ,19	— 1 ,21	0 ,71
Id. . .	1,018	24,692	— 1 ,69	— 2 ,24	1 ,41
Id. . .	1,027	37,039	— 4 ,75	— 2 ,77	2 ,12
Id. . .	«	74,078	—16 ,00	— 4 ,30	«
Cloruro di calcio	1,005	6,173	+ 3 ,24	— 0 ,38	— 0 ,22
Id. . .	1,010	12,346	+ 2 ,05	— 0 ,53	— 0 ,53
Id. . .	1,020	24,692	+ 9 ,06	— 1, 12	— 1 ,03
Id. . .	1,031	37,039	— 2 ,43	— 3 ,92	— 1 ,61
Id. . .	1,060	74,078	—10 ,43	— 5 ,28	— 3 ,56
Solfato di potassa	1,005	6,173	+ 2 ,92	— 0 ,15	— 0 ,15
Id. . .	1,010	12,346	+ 1 ,91	— 0 ,27	— 0 ,27
Id. . .	1,020	24,692	— 0 ,10	— 0 ,56	— 0 ,56
Id. . .	1,030	37,039	— 2 ,28	— 2 ,09	— 0 ,77
Id. . .	1,058	74,078	— 8 ,37	— 4 ,08	— 1 ,50
Solfato di soda .	1,006	6,173	+ 2 ,58	— 0 ,27	— 0 ,17
Id. . .	1,012	12,346.	+ 1 ,15	— 1 ,14	— 0 ,33
Id. . .	1,023	24,692	— 1 ,51	— 0 ,83	— 0 ,69
Id. . .	1,034	37,039	— 4 ,33	— 2 ,39	— 1 ,10
Id. . .	1,066	74,078	—12 ,26	— 2 ,17	— 1 ,13
Carbonato di potass.	1,033	37,039	— 3 ,95	— 3 ,21	— 1 ,17
Id. . .	1,064	74,078	—12 ,41	— 2 ,25	— 2 ,25
Carbonato di soda	1,039	37,039	— 7 ,01	— 2 ,85	— 1 ,37
Id. . .	1,075	74,078	—17 ,30	— 2 ,20	— 2 ,02
Solfato di rame .	«	57,996	— 0 ,62	— 1 ,32	— 0 ,37
Potassa pura. .	1,032	37,039	— 5 ,64	— 2 ,10	— 2 ,03
Id. . .	1,062	74,078	—15 ,93	— 4 ,33	— 4 ,33
Alcool	0,988	74,078	+ 2 ,30	— 2 ,83	— 2 ,83
Acido solforico .	1,008	12,346	+ 0 ,60	— 0 ,47	— 0 ,47
Id. . .	1,016	24,692	— 1 ,92	— 1 ,09	— 0 ,90
Id. . .	1,024	37,039	— 5 ,12	— 1 ,34	— 1 ,34

Altri fisici cercarono la temperatura corrispondente alla massima densità dell'acqua, determinando la perdita di peso che ne riceve un corpo immerso. Così Lefèvre-Gineau all'epoca della istituzione del nuovo sistema metrico francese, trovò pesando nell'acqua a diverse temperature un cilindro di rame costruito da Fortin [1], che questo liquido presenta una contrazione massima a 4°,4

[1] L'esattezza del cilindro era stata sperimentata dallo stesso Fortin mediante una macchina da lui inventata, la quale rendeva sensibile $\frac{1}{4000}$ di linea.

sopra 0°. Più tardi Hallström mediante le pesate di una palla vôta fatta di un vetro, di cui egli aveva determinata la dilatazione lineare sotto forma di tubi, ottenne dalla discussione di 64 accurate sperienze che la densità dell'acqua in funzione della temperatura è data dall'equazione empirica

$$(dt = 1 + 0,0000529 39 t - 0,00000\,65322\, t^2 + 0,00000001445 t^3;$$

in cui dt indica la densità dell'acqua alla temperatura t, prendendo per unità la densità alla temperatura 0°. Trattando quest'equazione coi noti metodi del calcolo superiore si trova che il valore massimo di dt corrisponde a $t = 4°,1$.

Tralles in Isvizzera, Hope in Inghilterra e più tardi Rumford nelle loro ricerche sulla temperatura corrispondente alla massima densità dell'acqua partirono dal principio idrostatico che in una massa liquida, il cui grado di calore è crescente o decrescente, si si debbono stabilire delle correnti ascendenti dell'acqua più leggiera, e delle correnti discendenti di quella più pesante. L'apparecchio di Hope consisteva in un vase cilindrico di vetro A (*fig.* 76), in cui erano introdotti orizzontalmente due termometri B e C. Il cilindro veniva pieno di acqua distillata alla temperatura 0°, e situato in una stanza la cui temperatura era di più gradi superiore a 0°. Allora si osservava che il termometro C indicava una temperatura crescente, mentre B restava presso a 0°; dunque l'acqua riscaldandosi pel calore comunicato dal mezzo ambiente, diveniva più densa, e quindi discendeva; e quando C pervenne a 3°,33 allora B cominciò ad elevarsi, e giunse a 3°,35. Durante questo movimento di ascensione del termometro B la temperatura di C restò a 3°,33; ciò che dimostrava che oltre questo grado di calore l'acqua cessava di divenire più densa. E dall'istante in cui B segnò 3°,35 la sua temperatura si accrebbe più rapidamente di quella di C; la qual cosa dichiarava che l'ulteriore riscaldamento dell'acqua ne diminuiva la densità. Variando in diversi modi le sue sperienze Hope trovò che la temperatura corrispondente alla massima densità dell'acqua è tra 3°,33 e 3°,88.

65. *Dilatazione dei corpi aeriformi*. Col metodo di Musschenbroek le dilatazioni lineari dei solidi erano state con molt'accuratezza determinate da Lavoisier e Laplace; Deluc aveva fatto osservazioni interessanti la teoria del termometro sulla dilatazione apparente dei liquidi; ed intanto la dilatazione dei corpi aeriformi, dalla quale si era ottenuto il primo termometro, e che doveva essere di più facile misura, perchè più grande, era tuttavia soggetto di controversia tra i fisici, sì per la quantità che rispetto alla legge. Deluc e Lambert la volevano uniforme, mentre Roy, Luz, Guyton-Morveau la pretendevano varia. Mal soddisfatto delle ricerche fin'allora eseguite, Volta ne intraprese delle nuove; e persuaso che il termometro ad aria fosse invenzione dell'olandese Drebel, nominò il suo apparecchio *termometro drebelliano*. Era questo un tubo lungo circa 15 pollici, di 2 a 3 linee di diametro, e diviso in parti di eguali capacità facendovi scorrere una piccola colonna di mercurio. Ad un'estremità del tubo era soffiata una pallina piuttosto grande, la quale insieme alla parte del tubo estesa fino alla 1ª divisione, era occupata d'aria perfettamente asciutta, il resto veniva pieno di olio o di mercurio privati d'umidità per mezzo dell'ebollizione. Il tubo così preparato veniva immerso coll'apertura in giù in un cilindro di vetro (*fig.* 77) di tale altezza, che versandovi dell'acqua, ne restasse coverta anche la pallina. Facendo variare la temperatura del bagno tra 0° e 80° Rèaumur, ora versandovi dei pezzi di ghiaccio, ora estraendo dell'acqua con un piccolo sifone e sostituendovi dell'altra calda, egli osservava l'aumento di volume che prendeva la massa di aria sottoposta all'esperimento; e non prendeva nota dei volumi osservati, se non quando ritornavano identici sotto lo stesso grado di temperatura, che una volta otteneva per aumento di calore, ed un'altra per diminuzione. Nella memoria, [1] da cui togliamo i particolari di queste sperienze, nulla si dice rispetto alla correzione dei volumi per effetto della dilatazione del vetro; nè sembra verisimile che Volta l'avesse fatta, poichè lo scu-

[1] *Memoria sull'uniforme dilatazione dell'aria* — Collezione delle opere del Cav. Conte Al. Volta — Tom. III. pag. 327.

po delle sue ricerche stava nella comparabilità del termometro ad aria a quello fatto col mercurio, e nell'indagare la cagione della grande divergenza nei risultamenti ottenuti da fisici peritissimi nell'arte di sperimentare. Vi era però una correzione rilevante anche sotto questa veduta, ed era la variazione del volume di aria per effetto della diversa pressione, poichè la dilatazione deprimendo il livello del liquido nel tubo, lo allontanava vieppiù da quello del bagno, ed aumentava in conseguenza la pressione a cui l'aria era sottopposta. Facendo questa correzione nel determinare la variazione di volume dell'aria talune volte di 20 in 20 gradi, altre di 10 in 10, e finanche di 2 in 2, Volta trovò che l'aria si dilata uniformemente per ogni grado del termometro a mercurio, e che la quantità della sua totale dilatazione tra la temperatura del ghiaccio fondente a quella dell'ebollizione dell'acqua era di 0, 37 del suo volume a 0°; risultamento conforme a quello già ottenuto da Lambert.

Ma a risultamenti di ben altra importanza Volta pervenne, quando si fece ad indagare la cagione che aveva potuto rendere sì divergenti i valori ottenuti dai suoi predecessori. Variando le sue ricerche con quella fecondità di spedienti, ch'è propria del genio, egli trovò — 1° che le differenze nei valori di dilatazione trovati da diversi fisici, dipendevano dall'umidità annidata tra le particelle dell'aria, o aderente alla faccia interna del tubo — 2.° che fino a tanto che vi sia umidità non ancora svolta in vapore elastico, la dilatazione dell'aria appare crescente; ma ch'essa diviene uniforme dal momento che la produzione del vapore è compiuta: la qual cosa dimostrava la dilatazione del vapore essere uniforme come quella dell'aria. — 3° Che se in vece dell'olio o del mercurio il tubo si riempiva di acqua, nel qual caso l'aria sovrastava ad una sorgente continua di vapore, allora la sua dilatazione e quindi l'elasticità diveniva crescente in tutta l'estensione della scala termometrica. Quest'ultimo risultamento, che dichiarava essere la quantità di vapore crescente colla temperatura, era un fatto di sommo interesse per un tempo in cui la vera teoria dell'evaporazione appena cominciava a stabilirsi.

Volta faceva queste rilevanti scoverte nel 1792. Nel 1801 Gay-Lussac in Francia e Dalton in Inghilterra, senza neppur nominare il fisico italiano che colla scoverta della pila aveva già reso immortale il suo nome, rifecero quel che Volta aveva già fatto; aggiungendo soltanto delle ricerche sopra gas differenti dall'aria, e pei quali essi trovarono la stessa quantità di dilatazione 0,375 da 0° a 100°. I risultamenti di Gay-Lussac furono poi confermati da nuove ricerche di Dulong e Petit, ed estesi da —36° del termometro centigrado a +360°.

Il coefficiente di dilatazione 0,00375 era stato trovato da Lambert; l'uniforme dilatazione dell'aria messa fuori dubbio dalle ingegnose sperienze di Volta; ai fisici francesi non sarebbe dunque restato che il merito di aver trovata identica la dilatazione per tutti i gas, se Magnus e Regnault non avessero in seguito dimostrato ch'essa non solo varia pei diversi gas, ma ancora secondo la pressione a cui vengono sottoposti; come dichiareremo nell'articolo *Densità dei gas.*

CAPO TERZO.

Influenza della compressione ed espansione dei corpi sulla loro temperatura.

66. Se la diversa energia del calore fa variare le dimensioni dei corpi, viceversa l'alterazione meccanica del loro volume apporta dei cangiamenti nella loro temperatura. Berthollet, Pictet e Biot fecero insieme delle sperienze su tondini di oro, argento e rame ch'essi fecero preparare di eguali dimensioni per sottoporli all'azione di un torchio di zecca. Avendo con esperienze preliminari determinata la relazione che passava tra l'elevazione di temperatura che riceveva un dato peso di ciascuno dei suddetti metalli ed il grado di calore che colla sua immersione comunicava ad una certa massa di acqua; appena la moneta aveva ricevuto il colpo dal torchio, essi la immergevano celeramente in una quantità di acqua sufficiente a ricoprirla, e dall'aumento di temperatura che

questa riceveva, arguivano la quantità di calore svolto nell'atto della compressione. Ecco i risultamenti che ne ottennero.

Sperienze fatte su due monete di rame.

		Aumento di temperatura in gradi centesimali.
1° colpo	1ª moneta	9°,69
	2ª moneta	11°,56
2° colpo	1ª moneta	4°,06
	2ª moneta	2°,50
3° colpo	1ª moneta	1°,06
	2ª moneta	0°,81
Quantità totale di calore svolto	dalla 1ª moneta.	14°,81
	dalla 2ª moneta.	14°,87

Sperienze su due monete di argento.

1° colpo	1ª moneta	3°,44
	2ª moneta	4°,06
2° colpo	1ª moneta	3°,25
	2ª moneta	1°,19
3° colpo	1ª moneta	1°,50
	2ª moneta	1°,12
Quantità totale di calore svolto	dalla 1ª moneta.	8°,19
	dalla 2ª moneta.	6°,37

Dai numeri segnati in queste due tavole si rileva — 1° che la quantità di calore svolto da ciascuna moneta è andata decrescendo sotto i colpi successivi del torchio; la qual cosa dipendeva dalla compressione decrescente che soffriva ciascuna moneta. — 2° che a dati eguali l'argento ha svolto meno calore del rame, e più piccola ancora è stata la quantità di calore data dall'oro. In conseguenza di questo fatto i predetti fisici cercarono secondo qual ragione questi metalli aumentavano di densità e quindi diminuivano di volume sotto una data compressione; e facendo tali ricerche sui tre metalli prima e dopo di essere stati battuti, ebbero i valori seguenti.

Densità di un tondino di oro laminato e non battuto . . .	19,3337
—— dello stesso dopo averlo ricotto	19,2240
—— dello stesso tornito in seguito per pulirlo	19,2390
—— dello stesso battuto	19,2487
Densità di un tondino di argento	10,4667
—— dello stesso ricotto	10,4465
—— dello stesso battuto	10,4838
Densità di un tondino di rame	8,8329
—— dello stesso battuto	8,8898
—— dello stesso battuto una seconda volta.	8,9081

Dunque prendendo come unità il volume del metallo ricotto,

Quello dell'oro per la compressione è divenuto.	0,9977
Quello dell'argento	0,9978
Quello del rame per la prima compressione.	0,9958
—— per la seconda compressione	0,9945

La compressione è dunque intimamente ligata collo svolgimento di calore, poichè osserviamo che ove la compressione è stata più grande, là si è ottenuto maggiore aumento di temperatura.

67. Rispetto ai liquidi si hanno parecchie serie di sperienze, tra le quali prescegliamo quelle seguite da Colladon e Sturm nel loro lavoro sulla compressibilità di questi corpi. Essi si servirono di un piccolo pallone le cui pareti, spesse di 25 a 35 millimetri, potevano resistere a rapide pressioni di più atmosfere [1]. Il pallone, nel cui centro si trovava la spirale di un termometro di Brèquet (che in seguito descriveremo), era pieno del liquido su cui si voleva sperimentare, e che veniva poi sottoposto agli sforzi di una tromba di compressione. La quale, ora adattandovi una vita perpetua, ora spingendola con una leva, ed ora percuotendone lo stantuffo a colpi di martello, produceva o lente pressioni, o pressioni che duravano anche meno di un quarto di minuto secondo, o finalmente del tutto istantanee. Quando il pallone fu pieno di acqua

[1] L'aria, come vedremo nel libro seguente, esercita una pressione sulla superficie dei corpi che vi sono immersi; ed il valore medio di questa pressione è eguale al peso di una colonna di mercurio alta 0m,76 e di una base equivalente alla superficie del corpo. Quindi una pressione di più atmosfere vuol dire una pressione eguale al peso di una colonna di mercurio avente una certa base ad alta più volte 0m,76.

perfettamente distillata, sotto una lenta pressione di 36 atmosfere il termometro a spirale indicò un grado di raffreddamento; effetto che i summentovati fisici giustamente attribuirono all'ineguale compressibilità dei metalli componenti la spira, poichè esso durava tutto il tempo della pressione. Nè i risultamenti furono più favorevoli all'aspettativa di uno svolgimento di calore, adoperando gli altri due modi di pressione; cosicchè Colladon e Sturm conchiusero che tra i limiti di esattezza dell'esperienza la temperatura dell'acqua non riceve aumento sensibile neanche sotto una pressione subitauea di 40 atmosfere.

Poichè lo svolgimento di calore non deve dipendere soltanto dalla rapidità della compressione, ma eziandio dalla quantità di questa; era naturale il supporre che quel calore che non si era svolto dall'acqua, in pari circostanze avrebbe potuto esserlo da un altro liquido più compressibile, dall'etere per esempio. Mettendo a pruova questo liquido i mentovati fisici osservarono che una lenta pressione di 30 a 36 atmosfere lasciava pressochè stazionario il termometro di Bréguet; il che indicava già un sensibile svolgimento di calore, poichè in pari circostanze aveva segnato nell'acqua un movimento di contrazione. Ma quando si fecero poi ad osservare gli effetti di una compressione subitanea, ebbero indicazioni positive di temperatura aumentata di 4° ed anche di 6° dello stesso termometro.

Questa dipendenza tra le variazioni meccaniche del volume di un corpo ed il suo grado di temperatura è sensibilissima nei corpi aeriformi. Situando un termometro sotto la campana pneumatica, e facendovi rapidamente il vôto, osserveremo un raffreddamento di qualche grado; e viceversa vedremo aumentata la temperatura, quando faremo rientrare l'aria nella campana. E se invece di un termometro ordinario adopreremo la spirale di Bréguet, soprammodo atta a segnare i rapidi cangiamenti di temperatura, osserveremo che le variazioni termometriche cagionate dalle sopraddette espansioni e contrazioni dell'aria si possono estendere ad una ventina di gradi. Ma variando le condizioni dell'esperimento si possono avere variazioni di temperatura assai più con-

siderevoli. Il piccolo apparato, conosciuto sotto il nome di *acciarino pneumatico* mette in evidenza la grande quantità di calore che i gas possono svolgere per mezzo della compressione. È questo un tubo di ottone a fondo chiuso, lungo circa 4 pollici e largo parecchie linee: in esso si fa penetrare uno stantuffo alla cui base, che porta una piccola cavità, si è adattato un pezzetto di esca. Spingendo vigorosamente lo stantuffo contro il fondo del cilindro ed estraendolo prontamente, si troverà l'esca accesa per l'alta temperatura acquistata dall'aria nell'atto della sua compressione. Il sig. Thénard ha trovato che talune polveri fulminanti sotto una pressione di 3 a 4 atmosfere richiedevano per detonare una temperatura di 200 a 250 gradi. Queste polveri messe nell'acciarino pneumatico, e sostituito il gas azoto, ch'è incapace di alimentare la combustione, all'aria atmosferica, si ebbe la loro detonazione. Or nell'acciarino pneumatico il gas riceveva una pressione di circa 4 atmosfere; dunque mediante la sola riduzione del volume di un gas si ottiene un aumento di temperatura di oltre 200 gradi.

E quanto all'intenso raffreddamento che può derivare dall'espansione dei gas, ne abbiamo un esempio notevole in una macchina lungo tempo adoperata nelle miniere di Schemnitz in Ungheria. Era questa una tromba, che in vece del solito giuoco dello stantuffo, era messa in azione dall'elasticità di una massa di aria compressa da una colonna di acqua alta 40 a 50 metri. Aprendo una chiavetta che dava uscita a quell'aria, e presentando al foro un corpo qualunque, lo si osservava bentosto coverto di piccoli ghiacciuoli. Dunque l'aria dilatandosi concepiva tale raffreddamento che bastava a ridurre nello stato solido il vapore acqueo ch'essa conteneva.

68. Non solo le compressioni prodotte da impulsi meccanici, ma eziandio quelle cagionate dall'azione delle forze molecolari sono costantemente accompagnate da svolgimento di calore. Nel 1822 Pouillet pubblicò una serie di sperienze sul calore prodotto dai liquidi nel momento che bagnano i solidi, con cui vengono a contatto. Per aumentare la superficie di azione egli riduceva i corpi, su cui voleva sperimentare in minutissime particelle; i metalli, per

esempio, in sottile limatura, ed in polvere assai fina i corpi fragili. Ed essendo poco sensibile il calore che in tali sperienze si svolge dai corpi inorganici, Pouillet usò termometri di un cannello sì sottile da ridurre la colonna di mercurio, che vi penetrava, ad un filo tenuissimo: e così facendo, il bulbo quantunque piccolo, aveva tuttavia una capacità sufficiente per dare ad ogni grado una lunghezza di 30 od anche di 50 millimetri ed in conseguenza rendere sensibili anche i centesimi di grado. Tra i corpi inorganici egli sperimentò sopra diversi metalli, sopra ossidi insolubili, come silicia, allumina, magnesia, ossidi di ferro, di zinco, di stagno, ec. e sopra altri corpi più composti, come vetro, mattoni, porcellana, argilla; ed i liquidi con cui bagnava questi diversi corpi, erano l'acqua distallata, l'olio, l'alcool, l'etere acetico, e l'olio essenziale di terebentina. Le quantità di calore prodotto variarono, com'era da prevedersi, secondo la diversa natura dei corpi messi a contatto, e si estesero tra un quinto ed un mezzo grado centesimale.

Rispetto poi alle sostanze organiche previamente disseccate, non fu necessario usare termometri molti sensibili, poichè gli aumenti di temperatura variarono tra 2 e 10 gradi. I corpi di questa classe che Pouillet pose a contatto coi liquidi summentovati, furono tra i vegetali il carbone, l'amido, il legno, le corteccie e radici di diverse piante, semente ridotte in farina, o semplicemente schiacciate, od anche lasciate intere coi loro gusci; e tra le sostanze animali la seta, la lana, la spugna, i capelli, l'osso di balena, l'avorio, il corno, le pelli, le membrane, ec.

69. Rispetto alle variazioni termometriche, da cui è risultata la cognizione dei fenomeni descritti in questo articolo, è d'uopo osservare ch'esse sono state ben lontane dal dichiarare il vero cangiamento di temperatura avvenuto nel corpo sottoposto all'esperimento. Ed in vero chiamando m la massa del termometro e t la sua temperatura prima di ricevere l'azione del corpo con cui viene a contatto; m' la massa di quest'ultimo e t' la temperatura che prende sotto l'azione a cui viene sottoposto in presenza del termometro: è chiaro che quando l'equilibrio termico sarà avvenuto tra

il termometro ed il corpo a contatto, allora sulla scala si leggerà la temperatura

$$\theta = \frac{mt + m't'}{m + m'},$$

la quale per essere eguale a t', ch'è il valore richiesto nell'esperimento è d'uopo che m' sia infinitamente grande rispetto ad m; onde poter negligere m rispetto ad m', mt in paragone di $m't'$, ed avere sensibilmente

$$\theta = \frac{m't'}{m'} = t'.$$

Così un termometro immerso in un bagno, esposto all'aria libera, ec. ci darà la temperatura dell'acqua, dell'aria ec. perchè la massa del fluido che si può sempre rinnovare intorno alla pallina termometrica, si deve riguardare come infinitamente grande rispetto a quest'ultima. Ma nelle sperienze precedenti, in cui la variazione termometrica è stata per talune di esse pressochè istantanea, ed in generale sempre di brevisima durata, sul termometro non ha potuto agire che una piccola falda del corpo messo a contatto colla pallina, e quindi anche nell'ipotesi di $m' = m$ si sarà avuto

$$\theta = \frac{t + t'}{2},$$

la quale espressione darà $\theta > t'$, o $\theta < t'$, secondochè sarà t minore o maggiore di t', vale a dire secondochè vi sarà stato sviluppo o assorbimento di calore (¹).

(¹) In questo calcolo non abbiamo avuto in mira di trovare la vera relazione che unisce θ, t, t', m ed m', e dalla quale si potrebbe poi dedurre t' in funzione di θ; poichè allora avremmo dovuto mettere in linea di conto due altri elementi, la *capacità termica* e la *conduzione*. Il nostro scopo è stato semplicemente quello di far conoscere la necessità della divergenza di θ da t', e questa necessità non sarebbe che meglio dichiarata dall'introduzione della diversa capacità termica e conducibilità nella formola che dà il valore di θ in funzione di quello di t'.

CAPO QUARTO

Calore specifico.

70. Che cosa è il calore? — Ecco una quistione la quale benchè sorta nei primordi della scienza, rimane purtuttavia irresoluta. E se la generalità dei fisici riguarda i fenomeni termici come effetti dell'azione di un fluido speciale imponderabile, sono poi lontani dall'essere di accordo, quando si tratta di definire il modo di quest'azione. Il maggior numero pretende che l'etere calorifero agisca semplicemente per quantità, vale a dire che sia più caldo il corpo che contiene un numero più grande di atomi di calore; e poichè secondo questa opinione l'azione termica a distanza è prodotta dagli atomi caloriferi lanciati dai corpi caldi, così l'ipotesi, di cui parliamo, ha ricevuto il nome di *sistema dell'emissione*. Altri poi opinano il calore non esser altro che un movimento di vibrazione che l'etere può ricevere ed a vicenda comunicare alla materia ponderabile: così se il sole ed i corpi in ignizione fanno vibrare l'etere calorifero, questo dal canto suo eccita a speciale vibrazione i corpi che le sue onde incontrano sul loro cammino, e produce i fenomeni di un'accresciuta temperatura.

La comprensione delle idee in un concetto ipotetico è sempre relativa alla somma dei fatti noti nel tempo in cui quel concetto venne formato per comporli in un sistema scientifico. Quindi le nuove scoverte apportano sempre qualche cangiamento or nella somma, or nella natura delle idee integranti il concetto primitivo, ed in mezzo a queste successive trasformazioni l'idea fondamentale reggerà tuttavia finchè qualche inattesa scoverta non venga a dimostrarne l'impossibilità. Allora si vedrà sorgere una nuova ipotesi adatta a riunire sotto un solo principio la somma dei fatti conosciuti, ed alla quale nell'avvenire sarà forse serbata un'egual sorte. Questo continuo avvicendarsi, che compendia la storia di tutte le ipotesi, si è ancora osservato nelle due principali congetture, a cui i fisici sono ricorsi per coordinare ad un solo principio

i fenomeni del calore. Finchè non si è trattato che di spiegare i fenomeni di dilatazione, di cangiamento di stato, di conduzione, e di azione a distanza tra certi corpi ed esplorata con taluni mezzi, è stato indifferente il supporre che l'etere calorifero agisca per emissione o per vibrazione; e se Rumford produceva delle sperienze i cui risultamenti escludevano l'idea di un'azione dipendente soltanto dalla massa dell'etere, Berthollet dal canto suo sapeva ricondurli al principio dell'emissione [1]. Ma i fenomeni della *termocrosi*, di cui parleremo nel IX libro di quest'opera, ci faranno conoscere dei fatti che rendono impossibile il concetto di un'azione dipendente dalla somma soltanto degli atomi caloriferi; quindi se nello stato attuale della scienza vogliamo conservare la supposizione di un etere, dobbiamo immaginarlo vibrante.

Ma l'idea prima, d'onde muove il dilemma di un'emissione o di una vibrazione, è poi reale? — Per rispondere a tal quistione è d'uopo osservare che in tutte le dottrine fisiche che hanno preceduto la scoverta della gravitazione universale, l'idea di azione nella materia si mostra indivisibile dall'idea di contatto; poichè la prima azione materiale che siasi presentata alla meditazione del fisico, è stata quella che si palesa nell'urto di due o più corpi. Quindi se il sole ci riscalda alla distanza di 80 e più milioni di miglia, si doveva necessariamente supporre o che c'invii degli atomi caloriferi, o che ci comunichi una simile azione mercè le vibrazioni di un etere sommamente sottile ed elastico. Ma dopochè il sistema della gravitazione universale ci ha fatto comprendere

[1] Rumford facendo girare rapidamente un trapano ottuso in un cilindro di bronzo pesante 13 libbre inglesi, trovò che in due ore di movimento e sotto una pressione equivalente a 100 quintali il trapano aveva ridotto in polvere 4115 grani di bronzo, e si era svolta una quantità di calore che avrebbe elevata da 0° a 100° la temperatura di libbre 26,38 di acqua. Egli riguardava quest'esperienza come decisiva in favore dell'ipotesi di una vibrazione calorifera. Ma Berthollet considerando la diminuzione che ebbe a soffrire il volume del bronzo sotto la forza premente di 100 quintali, fece osservare che la quantità di calore ottenuta da Rumford poteva essere prodotta dalla compressione; e per viemeglio rischiarar la cosa egli con Pictet e Biot eseguì le sperienze che abbiamo descritto al n.° 66.

la possibilità di un'azione che si estende nell'immensità dello spazio senza l'intervento di un mezzo materiale che la conduca da un punto all'altro, allora la necessità logica di un'azione inseparabile dal contatto dei corpi cessò di esistere nelle dottrine fisiche; e tutte le teoriche, che supponevano questo principio, cominciarono a presentarsi sotto il loro vero aspetto, qual'è quello di una semplice ipotesi.

Premesse queste nozioni, veniamo all'idea storica del calore specifico. — Boerhaave aveva sostenuto, contro i principî di Bacone da Verulamio, che il calore non consiste in un movimento di vibrazione degli atomi ponderabili, ma che viene prodotto dall'azione di un fluido speciale, ora assorbito ed ora emesso dai corpi. Il dottor Giuseppe Black, a cui il suo maestro Cullen aveva ispirato il gusto delle ricerche fisiche e chimiche, si fece ad eseguire sperimenti dai quali sperava poter rilevare quale delle due opinioni fosse la vera; ed in tali ricerche gli accadde osservare che il calore può restare annidato tra le particelle di un corpo, senza che il termometro possa dar segno della sua presenza. Black, per esempio, mescolava una libbra di acqua a 0° con una libbra di acqua a 60° Réaumur, ed otteneva due libbre di acqua a 30°; ma quando poi scioglieva una libbra di ghiaccio a 0° in una libbra di acqua a 60°, ovvero immergeva nell'acqua corpi di diversa natura; allora non otteneva dalla mescolanza quel grado di calore che avrebbe dovuto risultare dalla temperatura dei corpi e dalla loro massa.

La scoverta di Black si divulgò bentosto in tutta l'Europa, e Wilcke in Isvezia e Crawford in Inghilterra furono primi a confermarne i risultamenti con nuove ricerche. Quindi sorse l'idea di *calore latente*, vale a dire che una parte del fluido calorifero potesse nascondersi tra le molecole di un corpo, senza che il termometro ne fosse avvertito; e fu denominato *calore specifico* la speciale dose di calore di cui un corpo ha bisogno per elevare di un certo numero di gradi la temperatura di una data quantità della sua massa. E poichè l'idea di misura richiedeva necessariamente la scelta di un'unità, così si tolse a termine di comparazione l'acqua; e si è riguardata come unità di calore la quan-

tità di questo fluido necessaria ad aumentare di un grado l'unità di massa dell'acqua. Il metodo escogitato per menare ad effetto questa misura fu conforme alle idee sistematiche del tempo sulla natura del calore. Questo agente veniva riguardato come un fluido che s'introduce nei pori dei corpi non altrimenti che un liquido nel suo recipiente; e poichè il recipiente che si vôta, restituisce la quantità di liquido che ha ricevuto, così fu stimato indifferente determinare la quantità di calore che un corpo assorbiva nel riscaldarsi, o quella che emetteva raffreddandosi. Aggiungasi inoltre che le indicazioni del termometro erano riguardate come proporzionali alle quantità di calore; ed in conseguenza bastava conoscere la quantità perduta per una diminuzione qualunque di temperatura, per avere mediante un calcolo semplicissimo quella corrispondente ad un solo grado.

Wilcke e Crawford determinarono i calori specifici di diverse sostanze col metodo della miscela: vale a dire ch'essi prendevano una massa di acqua, di cui erano noti il peso e la temperatura; in essa immergevano un peso definito del corpo su cui volevano sperimentare, e che avevano, precedentemente all'immersione, elevato ad una temperatura conosciuta; e dal grado di calore che acquistava il bagno essi arguivano di quanto era diminuita la temperatura dell'unità di massa del corpo immerso, per l'unità di calore che aveva ceduto ad un egual peso di acqua. Pel modo col quale questo metodo veniva allora eseguito, non si tenea conto delle perdite di calore che durante la miscela avvenivano pel contatto dell'acqua colle pareti del recipiente e col mezzo ambiente; fu in conseguenza giudicato inesatto, e sostituito più tardi dal *calorimetro* di Lavoisier e Laplace, col quale il calore specifico di un corpo è determinato dalla quantità di ghiaccio ch'esso può fondere. Finalmente, senza perdere giammai di veduta la natura fluida del calore, Tobia Mayer propose il metodo del raffreddamento, per mezzo del quale il calore specifico di un corpo si determina mediante il tempo ch'esso impiega a raffreddarsi di un certo numero di gradi.

Questi tre metodi, che qui appresso esporremo in tutti i loro

particolari, sono quelli che la scienza fin ora possiede per la determinazione del calore specifico dei diversi corpi. Valenti fisici si sono occupati a perfezionarne l'esecuzione, valutando con maggiore esattezza l'azione della cause perturbatrici, quando non sia stato possibile di eliminarle. Ma l'idea primitiva, vale a dire l'ipotesi di un fluido calorifero, che i corpi possono contenere in quantità più o meno grande, ipotesi che ci fa riguardare il calore specifico come effetto di una proprietà dei corpi conosciuta sotto la denominazione di *capacità termica*; questa idea, io dico, in tutta la comprensione che aveva al tempo di Wilcke e Crawford, ha diretto i lavori più recenti dei fisici attuali. Sotto questa considerazione ideologica la dottrina del calore specifico è la più imperfetta della Fisica odierna. Nè possiamo astrarre dal principio ipotetico, e stare ai semplici risultamenti dell'esperienza, perchè questi sono compresi nei valori assegnati alle capacità termiche delle diverse sostanze, i quali sono stati calcolati dietro i tre seguenti principî — 1° che il calore sia effetto di quantità di un fluido speciale, idea che nel IX libro di quest'opera troveremo inconciliabile con taluni fenomeni di termocrosi — 2° che la quantità di calore sia proporzionale alla temperatura, principio interamente ipotetico — 3° che la quantità di calore necessaria per elevare la temperatura di un corpo da 0° a *t* gradi, sia la stessa che quella che il corpo emette nel passare dai *t* gradi a 0°, principio evidente nel solo sistema dell'emissione. Ciò che di positivo oggi la scienza possiede relativamente alla dottrina del calore specifico si riduce a sapere che un corpo raffreddandosi di *t* gradi, non perde una quantità di calore eguale a quella che innalzerebbe degli stessi *t* gradi la temperatura di un altro corpo di egual massa. Ma la determinazione esatta dell'aumento di temperatura che prenderebbe il secondo corpo, non trova anche nelle ultime ricerche di Regnault pruove più convincenti della sua realtà, di quelle che offrivano le sperienze di Wilcke e Crawford; poichè i successivi immegliamenti apportati ai metodi di sperimentare non hanno raggiunto altro scopo che quello di stabilire tra il fatto ed il principio ipotetico un'armonia più conforme allo stato attuale delle cognizioni fisiche.

71. Come sopra dicevamo, Wilcke e Crawford determinarono le capacità termiche di diversi corpi col metodo delle miscele. Per menare ad effetto questo metodo bisogna determinare il peso di una certa massa di acqua, la cui temperatura sarà data da un termometro in essa immerso; indi prendere un peso noto del corpo da sperimentare ed elevarlo ad una temperatura conosciuta; immergerlo nell'acqua ed osservare l'aumento di temperatura che questa ne riceve. Chiamiamo M la massa dell'acqua, t la temperatura prima d'immergere il solido, e t' quella a cui si è elevata dopo l'immersione; m la massa del solido, θ la temperatura che aveva prima di venire a contatto dell'acqua, e c la sua capacità facendo quella dell'acqua $= 1$. Se le variazioni termometriche avvenute nel corso dell'esperienza, le riguardiamo come espressioni delle differenze di calore per l'unità di massa (ciò ch'è lecito nell'ipotesi del calore proporzionale alla temperatura); allora avremo che la quantità di calore guadagnata dall'acqua coll'immersione del solido sarà $M(t'-t)$, e quella perduta dal solido sarà $mc(\theta - t')$; e queste due espressioni essendo eguali nell'ipotesi dell'emissione, avremo per determinare c l'equazione

$$M(t'-t) = mc(\theta - t').$$

Or questa prima idea sulla determinazione del calore specifico per mezzo della miscela è restata inalterata nel sucessivo perfezionamento recato al metodo di sperimentare; e tutte le ricerche all'uopo istituite, sono state dirette ad ottenere esattamente i valori di t' e θ. Rispetto al primo di questi valori osserviamo che oltre all'influenza che vi hanno la massa e temperatura sì dell'acqua che del corpo immerso, esso dipende ancora dalla diversa forma e conducibilità del corpo immerso, dalla diversa natura e forma del recipiente, e dall'eccesso finale $t'-t$. Ed in vero, mentre la temperatura dell'acqua si eleva pel contatto del corpo immerso, una parte del calore è dispersa dall'evaporazione ed irradiazione della superficie libera del liquido, ed un'altra parte sfugge attraverso le pareti del recipiente. Per ciò la temperatura dell'acqua cesserà di elevarsi, quando ciò che perde per le indicate vie eguaglia ciò

che riceve dal corpo immerso; ed in conseguenza se non avvenisse trasmissione di calore, t' si presenterebbe con un valore più grande di quello segnato dal termometro. Or è facile comprendere che a dati eguali la quantità di questa perdita sarà stata tanto più grande, per quanto sarà maggiore la superficie che il livello dell'acqua e le pareti del recipiente presenteranno allo spazio ambiente. Sotto questa veduta converrebbe dare al recipiente una forma sferica, se questa non dovesse eliminarsi per la somma difficoltà di cui complicherebbe l'esperimento: non resta allora che adottare una forma cilindrica, il cui diametro di base sia eguale all'altezza [1]. Conviene inoltre che il cilindro si costruisca con lamina sottile di un metallo buon conduttore del calore affinchè dovendo correggere il risultato dell'esperienza della quantità di calore assorbita e trasmessa dal recipiente, si possa supporre che questo abbia la temperatura dell'acqua in tutta la sua spessezza. Finalmente osserviamo, rispetto alla difficoltà di avere il vero valore di t', che le perdite fin'ora enumerate avranno una relazione coll'eccesso finale $t'-t$, poichè per quanto più grande sarà questa differenza, più considerevole sarà stata la perdita di calore avvenuta prima che t' sia giunto al suo massimo valore, e maggiore in conseguenza la divergenza di t' dal vero.

Quanto al vero valore di θ, questo si può ottenere facendo restare il corpo per molto tempo in un bagno o in una stufa a tempe-

[1] Perchè la perdita di calore sotto un definito eccesso di temperatura sia la più piccola possibile, è d'uopo che sia minima l'intera superficie del cilindro per un dato valore della sua capacità. Chiamando x il raggio della base del cilindro, la somma delle due basi sarà rappresentata da $2\pi x^2$; la sua superficie convessa sarà $\frac{v}{\pi x^2} 2\pi x = \frac{2v}{x}$, essendo $\frac{v}{\pi x^2}$ l'altezza di un cilindro di cui v è il volume ed x il raggio della base. L'intera superficie del cilindro sarà dunque $\frac{2v}{x} + 2\pi x^2$, la quale funzione per le note regole del Calcolo Differenziale diviene minima, quando

$$x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}; \quad \text{quindi } z = 2\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}} = 2x.$$

ratura conosciuta;ed il secondo metodo è preferibile al primo perchè dispensa dal dover fare la correzione relativa allo strato liquido che lascia aderente al corpo, correzione che viene sempre di un'approssimazione ipotetica. Ma perchè il corpo prenda in tutta la massa la temperatura del mezzo che lo circonda, è necessario che abbia piccola spessezza. Se questa fosse considerevole potrebbe avvenire (come in appresso rileveremo dalle leggi della conduzione) che il corpo nel riscaldarsi avesse nella superficie una temperatura più elevata che nell'interno, e viceversa nel cedere il suo calore all'acqua. E quando tutte queste condizioni saranno soddisfatte, è d'uopo che il corpo nel minimo tempo dal recinto alla temperatura θ passi nell' acqua, affinchè entri nel liquido collo stesso grado di calore.

Col metodo delle mescolanze parecchi fisici hanno determinato le capacità termiche di diverse sostanze. La serie piu recente ed estesa di queste sperienze è quella eseguita da Regnault. L'apparecchio da lui adoperato, è rappresentato dalla *fig.* 81. Il corpo è situato in un piccolo paniere *e* formato di fili metallici, e nel cui mezzo sta il termometro *d* che deve indicare la temperatura θ alla quale sarà elevato il corpo. Il paniere è chiuso nel cilindro *c*, questo in *b*, e *b* in *a*; dimodochè si ha un recipiente a triplo involucro. Lo spazio compreso tra *a* e *b* è occupato da *ovatta* ed aria; e nella cavità media *b* circola il vapore che pel tubo *y* viene dalla caldaia x mantenuta in continua ebollizione, e che poi pel tubo y' passa nel serpentino x'. Questo vapore riscalda lo spazio *c*; ed il termometro *d*, che lentamente si riscalda, giungendo infine ad una temperatura fissa, fa conoscere l' istante in cui il corpo sottoposto all'esperimento è pervenuto allo stesso grado di calore. Il vase destinato alla mescolanza, scorrendo sopra una piccola rotaia, può essere menato sotto la stufa composta dai tre cilindri *a*, *b*, *c*; e vi è immerso un termometro *f* destinato a segnare la temperatura dell'acqua, come quella dell'aria ambiente è data dal termometro *h*. Mediante apposito meccanismo si apre il fondo della stufa, ed il paniere *e*, lasciato libero il suo filo di sospensione, cade nel vase destinato alla mescolanza, e perchè in questo movi-

mento, non ostante la sua brevissima durata, l'azione dell'aria esterna non avesse ad alterare la temperatura del paniere, lo spazio ch'esso percorre è difeso da strati di acqua. Appena il paniere è caduto nel recipiente il vase viene riportato alla prima posizione; l'acqua è rapidamente agitata perchè giunga presto all'equilibrio di calore col corpo immerso, e col catetometro si misura la sua massima temperatura.

A fine di compensare la perdita di calore che l'acqua soffre pel contatto del mezzo ambiente, Rumford propose di abbassare di tanti gradi la temperatura dell'acqua al disotto di quella dell'aria, per quanti gradi essa veniva elevata al disopra dello stesso mezzo dietro l'immersione del corpo caldo. Questo metodo, che così semplicemente eseguito, non può dare una sufficiente approssimazione, diviene utile come dato di un calcolo di correzione. Nelle sperienze di Regnault il vase per la mescolanza restava di 1° a 2° al disotto della temperatura dell'aria, e sopra di questa la temperatura dell'acqua dopo la miscela s'innalzava di 2° a 3°. Egli con esperienze preliminari aveva determinata la quantità di cui il vase si riscaldava o si raffreddava in 1″ per la differenza di 1° di temperatura; in conseguenza chiamando a questa quantità, y l'eccesso della temperatura ambiente su quella del vase, e z il tempo decorso tra l'istante in cui si è fatta l'osservazione della temperatura e l'istante in cui il paniere è caduto nell'acqua, in tutto questo tempo il vase avrà acquistata la quantità di calore ayz. Similmente chiamando z' il tempo che il vase impiega a prendere la massima temperatura pel calore che riceve dal solido immerso, y' l'eccesso massimo della temperatura del vase su quella dell'aria ambiente, pel raffreddamento si sarebbe perduta in questo tempo una quantità di calore rappresentata da $ay'z'$, se y' fosse stato costante. Siccome in questa ipotesi si avrebbe un valore più grande del vero, Regnault ne corresse l'errore moltiplicandolo per una frazione p, ch'egli aveva determinata per mezzo di sperienze preliminari: quindi nel tempo z' il vase aveva perduto la quantità di calore $apz'y'$; ma durante il primo tempo z aveva guadagnata la quantità di calore apz; dunque la vera perdita è stata

$a(pz'y' - yz)$, la quale aggiunta alla temperatura massima t' della mescolanza, si aveva quella che si sarebbe ottenuta se non vi fosse stata dispersione di calore.

A questa correzione bisognava aggiungerne un'altra dipendente dalla diversa capacità termica della sostanza del vase e del termometro immerso nel liquido, poichè sì l'uno che l'altro partecipavano del calore emesso dal corpo caldo. Per intendere chiaramente in qual modo debba eseguirsi questa correzione, osserviamo che se un corpo avente una capacità termica metà di quella dell'acqua, venga immerso in questo liquido, la quantità di calore ceduta o assorbita dal corpo (secondochè sarà più o meno caldo del liquido) sarà la stessa di quella che in pari circostanze avrebbe ceduto o assorbito una massa di acqua avente la metà del suo peso; ed in generale chiamando c la capacità termica del corpo ed m la sua massa, il suo effetto termico sarà equivalente a quello di una massa di acqua rappresentata da mc. Or il vase con cui sperimentava Regnault era un cilindro di ottone del peso di grammi 55,5, il vetro del termometro pesava 10^g, 27; ed il mercurio che vi era contenuto 70^g,62. Con esperienza preliminare egli aveva determinato la capacità termica del vase e quella del vetro di cui era fatto il termometro; quella del mercurio, corpo semplice ed in conseguenza invariabile, era nota per le ricerche dei fisici che lo avevano preceduto: gli fu dunque facile trovare il peso dell'acqua, equivalente nell'effetto termico al peso del vase e del termometro. Una simile correzione si faceva al peso del paniere che scendeva nell'acqua insieme al corpo riscaldato.

Ciò posto, chiamando m la somma del peso dell'acqua e dei pesi ridotti del vase e del termometro, θ la temparatura del corpo caldo ed m' il suo peso, t la temperatura dell'acqua prima dell'immersione, t' la sua temperatura massima dopo l'immersione, $t'_{,}$ questa medesima temperatura corretta, e μ il peso ridotto del paniere; la capacità c del corpo veniva data dall'equazione

$$m(t'_{,} - t) = (m'c + \mu)(\theta - t').$$

NOMI DELLE SOSTANZE.	CAPACITÀ.	PESI ATOMICI, l'atomo di ossigeno essendo=100.	PRODOTTI.
DETERMINAZIONI PRELIMINARI.			
Ottone	0,09391		
Vetro.	0,19768		
Acqua	1,0080		
Essenza di terebentina	1,42593		
CORPI SEMPLICI, PURI.			
Ferro.	0,11379	339,21	38,597
Zinco.	0,09555	403,23	38,526
Rame.	0,09515	395,70	37,849
Cadmio	0,05669	696,77	39,502
Argento	0,05701	675,80	38,527
Arsenico.	0,08140	470,04	38,261
Piombo	0,03141	1294,50	40,647
Bismuto.	0,03084	1330,37	41,034
Antimonio	0,05077	806,45	40,944
Stagno delle Indie.	0,05623	735,29	41,345
Nickel	0,10863	369,68	40,160
Cobalto	0,10696	368,99	39,468
Platino laminato	0,03243	1233,50	39,993
Palladio.	0,05927	665,90	39,468
Oro	0 03244	1243,01	40,328
Solfo	0,20259	201,17	40,754
Selenio	0,08370	494,58	41,403
Tellurio.	0,05155	801,76	41,549
Iodo	0,05412	789.75	42,703
Mercurio	0,03332	1265,52	42,149
CORPI SEMPLICI, MENO PURI.			
Uranio	0,06190	677,84	41,960
Tungsteno	0,03636	1183,00	43,002
Molibdeno	0,07218	598,52	43,163
Nickel carburato	0,11192	369,68	41,376
—— più carburato	0,11631	369,68	42,999
Cobalto carburato.	0.11714	368,99	43,217
Acciaio Hansmann	0,11848	339,21	40,172
—— raffinato	0,12728	339,21	«
Ferro fuso bianco.	0,12983	339,21	44,038
Carbone.	0,21411	152,88	36,873
Fosforo	0,18870	196,14	37,024
Iridio impuro	0,03683	1233,50	45,428
Manganese molto carburato	0,14414	345,89	49,848
LEGHE METALLICHE.			
1 piombo 1 stagno	0,04073	1014,9	41,34
1 —— 2 ——	0,04506	921,7	41,53
1 —— 1 antimonio	0,03880	1050,5	40,76
1 bismuto 1 stagno	0,04000	1032,8	41,31
1 —— 2 ——	0,04504	933,7	42,05

NOMI DELLE SOSTANZE	CAPACITA'.	PESI ATOMICI. l'atomo di ossigeno. essendo=100.	PRODOTTI.
1 —— 1 ——1 antimonio.	0,04621	901,8	41,67
1 —— 2 ——1 ——2 zinco	0,05657	733,6	41,61
1 piombo 2 ——1 bismuto .	0,04476	1023,9	45,83
1 —— 2 ——2 —— . .	0,06082	1088,2	66,00
1 mercurio 1 ——	0,07294	1000,5	72,97
1 —— 2 ——	0,06391	942,1	46,12
1 —— 1 piombo. . . .	0,03827	1280,1	48,90
OSSIDI RO.			
Protossido di piombo in polvere.	0,05118	1394,5	71,34
—— —— fuso .	0,05089	1394,5	70,94
Ossido di mercurio	0,05170	1365,8	70,74
Protossido di manganese . .	0,15701	445,9	70,01
Ossido di rame	0,14201	495,7	70,39
—— di nickel	0,16234	469,6	76,21
—— —— calcinato alla fucina . .	0,15885	469,6	74,60
Media. . .	. . .	. . . .	72,03
Magnesia	0,24394	258,4	63,03
Ossido di zinco	0,12480	503,2	62,77
OSSIDI R^2O^3.			
Protossido di ferro(ferro oligisto).	0,16695	978,5	163,35
Colcothar poco calcinato. . .	0,17569	978,4	171,90
—— calcinato 2 volte . . .	0,17167	978,5	168,00
—— fortemente calcinato. .			
—— —— una 2ª volta.	0,16814	978,4	164,44
Acido arsenioso	0,12786	1240,1	158,56
Ossido di cromo	0,17960	1003,6	180,01
—— di bismuto	0,06053	2960,7	179,22
—— di antimonio	0,09009	1912,9	172,34
Media. . .	. . .	. . .	169,73
Allumina (corindo)	0,19762	642,4	126,87
—— (Zaffiro)	0,21732	642,4	139,61
OSSIDI RO^2.			
Acido stannico	0,09326	935,3	87,28
—— titanico (artificiale) . .	0,17164	503,7	86,45
—— —— (friabile)	0,17032	503,7	85,79
Media. . .	. . .	. . . .	86,49
—— Antimonioso	0,09553	1006,5	95,92
OSSIDI RO^3.			
Acido tunstico	0,07983	1483,2	118,38
—— molibdico	0,13240	898,5	118,99
—— silicico	0,19132	577,5	110,48
—— borico	0,23743	436,0	103,52

NOMI DELLE SOSTANZE	CAPACITA'.	PESI ATOMICI. l'atomo di ossigeno. essendo=100.	PRODOTTI.
OSSIDI COMPLESSI.			
Ossido di ferro magnetico . .	0,16780	1417,6	237,87
SOLFURI RS.			
Proto-solfuro di ferro . . .	0,13580	540,4	73,33
Solfuro di nickel	0,12813	570,8	73,15
—— di cobalto	0,12512	570,0	71,34
—— di zinco	0,12303	604,4	74,35
—— di piombo	0,05086	1495,6	76,00
—— di mercurio.	0,05117	1467,0	75,06
Proto-solfuro di stagno . . .	0,08365	936,5	78,34
Media. . .	. . .	. . . .	74,51
SOLFURI R^2S^3.			
Solfuro di antimonio	0,08403	2216,4	186,21
—— di bismuto	0,06002	3264,2	195,90
Media. . .	. . .	. . . .	191,06
SOLFURI RS^2.			
Bi-solfuro di ferro.	0,13009	741,6	96,45
—— di stagno.	0,11932	1137,7	135,66
Solfuro di molibdeno. . . .	0,12334	1001,0	133,46
Media. . .	. . .	. . . .	129,56
SOLFURI R^2S.			
Solfuro di rame	0,12118	992,0	120,21
—— di argento	0,07460	1553,0	115,86
SOLFURI COMPLESSI.			
Pirite magnetica	0,16023	»	»
CLORURI R^2Cl^2.			
Cloruro di sodio	0,21401	733,5	156,97
—— di potassio	0,17295	932,5	161,19
Pr. —— di mercurio. . . .	0,05205	2974,2	154,80
— —— di rame	0,13827	1234,0	156,83
— —— di argento	0,09109	1794,2	163,42
Media. . .	. . .	. . . .	158,64
CLORURI RCl^2.			
Clorуro di bario	0,08957	1299,5	115,44
—— di strontio	0,11990	989,9	118,70
—— di calcio	0,16420	698,6	114,72
—— di magnesio.	0,19490	601,0	118,54
—— di piombo	0,06641	1737,1	115,35
Pr.— di mercurio	0,06889	1708,4	117,68
— di zinco	0,13618	845,8	115,21
Pr.— di stagno.	0,10161	1177,9	119,50
Media. . .	. . .	. . . .	117,03

NOMI DELLE SOSTANZE.	CAPACITA'.	PESI ATOMICI, l'atomo di ossigeno essendo=100.	PRODOTTI.
Cloruro di magnesia	0,14255	788,5	112,51
CLORURI VOLATILI RCl^4.			
Cloride di stagno	0.14759	1620,5	239,18
—— di titano. . . . , . .	0,19145	1188,9	227,63
Media. . .	. . .	. . . .	233,40
CLORIDI VOLATILI R^2Cl^6.			
Cloruro di arsenico. . . .	0,17604	2267,8	399,26
—— di fosforo	0,20922	1720,1	359,86
Media. . .	. . .	. . .	379,56
BROMURI R^2Br^3.			
Bromuro di potassio	0,11322	1468,2	166,21
—— di argento	0,07391	2330,0	173,31
Media. . .	. . .	. . . .	169,76
Bromuro di sodio	0,13842	1269,2	175,63
BROMURI RBr^2.			
Bromuro di piombo	0,05326	2272,8	121,00
IODURI R^2I^2.			
Ioduro di potassio.	0,08191	2068,2	169,38
—— di sodio	0,08684	1869,2	162,30
Pr.—di mercurio.	0,03949	4109,3	162,34
—— di argento	0,06159	2929,9	180,45
Pr.—di rame	0,06869	2369,7	162,81
Media. . .	. . .	. . . .	167,45
IODURI RI^2.			
Ioduro di piombo	0,04267	2872,8	122,54
—— di mercurio.	0,04197	2844,1	119,36
Media. . .	. . .	. . . . ,	120,95
FLUORURI RFl^2.			
Fluoruro di calcio.	0,21492	489,8	105,31
NITRATI $Az^2O^5 + R^2O$.			
Nitrato di potassa	0,23875	1266,9	302,49
—— di soda	0,27821	1067,9	297,13
—— di argento	0,14352	2128,6	305,55
Media. . .	. . .	. . . .	301,72
NITRATI $Az^2O^5 + RO$.			
Nitrato di barite	0,15228	1633,9	248,83
CLORATI $Cl^2O^5 + R^2O$.			
Clorato di potassa.	0,20956	1532,4	321,04

NOMI DELLE SOSTANZE	CAPACITA'	PESI ATOMICI. l'atomo di ossigeno essendo=100.	PRODOTTI.
FOSFATI $P^2O^5 + 2R^2O$ (Pirofosfati).			
Fosfato di potassa	0,19102	2072,1	395,70
—— di soda.	0,22833	1674,1	382,22
Media. . .	. . .	. . . . .	389,01
FOSFATO $P^2O^5 + 2RO$.			
Fosfato di piombo	0,08208	3681,3	302,14
METAFOSFATO $P^2O^5 + RO$.			
Metafosfato di calce	0,19923	1248,3	248,64
FOSFATO $P^2O^5 + 3RO$.			
Fosfato di piombo	0,07982	4985,8	397,96
ARSENIATI $Ar^2O^5 + R^2O$.			
Arseniato di potassa. . . .	0,15631	»	»
ARSENIATI DI PIOMBO $Ar^2O^5 + 3PbO$.			
Arseniato di piombo . . .	0,07280	6623,3	409,37
SOLFATI $SO^3 + R^2O$.			
Solfato di potassa	0,19010	1091,1	207,40
—— di soda	0,23115	892,1	206,21
Media. . .	. . .	. . . . .	206,80
SOLFATI $SO^3 + RO$.			
Solfato di barite	0,11285	1458,1	164,54
—— di strontiana	0,14279	1148,5	164,01
—— di piombo	0,08723	1895,7	165,39
—— di calce	0,19656	857,2	168,49
—— di magnesia.	0,22159	759,5	168,30
Media. . .	. . .	. . . .	266,15
CROMATI.			
Cromato di potassa	0,18505	1241,7	229,83
Bi-cromato di potassa . . .	0,18937	1893,5	358,66
BORATI $B^2O^6 + R^2O$.			
Borato di potassa.	0,21975	1461,9	321,27
—— di soda	0,23823	1262,9	300,88
Media. . .	. . . .	. . . . .	311,07
BORATI $B^2O^6 + RO$.			
Borato di piombo.	0,11409	2266,5	258.60
BORATI $B^2O^6 + 2R^2O$			
Borato di potassa.	0,20478	1025,9	219,52
—— di soda	0,25709	826,9	212,60
Media. . .	. . .	. . . .	216,06

NOMI DELLE SOSTANZE	CAPACITA'	PESI ATOMICI l'atomo di ossigeno essendo = 100.	PRODOTTI.
BORATI $BO^6 + 2RO$.			
Borato di piombo.	0,09046	1830,5	165,54
TUNSTATI.			
Wolfram.	0,09780	»	»
SILICATI.			
Zirconio	0,14558	»	»
CARBONATI $CO^2 + R^2O$.			
Carbonato di potassa . . .	0,21623	865,0	187,04
—— di soda	0,27275	666,0	181,65
Media. . .	. . .	. . . .	184,35
CARBONATI $CO^2 + RO$.			
Carbonato di calce (Spato d'Islanda)	0.20858	631,0	131,61
—— —— (Aragonite). . .	6,20850	631.0	131,56
Marmo saccaroide bianco . .	0,21585	631,0	136,20
—— —— grigio	0,20989	631,0	132,45
Creta bianca	0,21485	631,0	135,57
Carbonato di barite , . . .	0,11038	1231,9	135,99
—— di strontiana	0,14483	922,3	133,58
—— di ferro	0,19345	714,2	138,16
Media. . .	. . .	. . . .	134,40
Carbonato di piombo . . .	0,08596	1669.5	143,53
Dolomite.	0,21743	582.2	126,59

Lo scopo di questo lungo lavoro di Regnault, ch'egli estese ancora a diversi liquidi isomerici, è stato quello di determinare l'estensione e l'esattezza di una legge scoverta da Dulong e Petit nelle loro ricerche sulle capacità termiche. Questi fisici avevano trovato che moltiplicando i pesi atomici dei corpi semplici, da essi sperimentati, pei numeri che n'esprimono il calore specifico, si aveva un prodotto costante; risultamento che dichiarava esservi una stessa capacità termica in tutti gli atomi dei corpi semplici. Le incertezze che allora (1819) vi erano sui valori dei pesi atomici, non concedevano di riguardare come una legge generale la scoverta di Dulong e Petit. Regnault tornando sulla stessa quistione

dopochè la dottrina degli equivalenti chimici era stata perfezionata da Berzelius e da Mitscherlich, ed eseguendo le sue ricerche con quella scrupolosa attenzione che assicura l'esattezza dei risultamenti, ha trovato, come si può rilevare dalla tavola precedente, che la legge del calore specifico inversamente proporzionale al peso atomico, ha luogo non solo pei corpi semplici, ma eziandio pei corpi composti che hanno una stessa composizione atomica ed una costituzione chimica simile.

72. *Metodo del calorimetro.* Il calorimetro inventato da Lavoisier e Laplace è rappresentato dalla *fig.*82. Tre cavità concentriche costituiscono questo apparecchio: la cavità centrale formata da rete metallica, riceve il corpo che si vuol sottoporre ad esperimento; le altre due sono destinate ad essere piene di ghiaccio, e per due condotti distinti si scaricano dell'acqua provveniente dalla sua fusione. In tal modo l'acqua che viene dalla cavità media rappresenta la quantità di ghiaccio fuso dal solo calore del corpo introdotto, poichè il ghiaccio che riempie la cavità esterna preserva quella di mezzo dall'azione calorifera dei corpi circostanti.

Quando si voglia sperimentare col calorimetro, si comincerà dal mettere un peso conosciuto del corpo in un bagno a temperatura nota, e vi si lascerà finchè abbia potuto prendere lo stesso grado di calore. Indi si riempiranno le cavità media ed esterna di frantumi di ghiaccio, si farà passare celeramente il corpo nella cavità centrale, e si chiuderanno i due coperchi. Si lascerà stare l'apparecchio per un tempo sufficiente (10 a 15 ore) a ridurre il corpo alla temperatura 0°, avvertendo però di rinnovare il ghiaccio nella cavità esterna a misura che verrà fuso dal calore del mezzo ambiente. Quando si è sicuro che il corpo sia già pervenuto alla temperatura 0°, allora si apre la chiave che ferma il condotto della cavità media, si raccoglie l'acqua ch'essa contiene, e si pesa. Rappresentando con m la massa del corpo, t la temperatura che aveva al momento che fu chiuso nel calorimetro, e p il peso del ghiaccio fuso; è evidente che l'unità di massa del corpo alla temperatura 1° avrebbe fuso la quantità di ghiaccio $\frac{p}{mt}$: un al-

tro corpo che colla massa m' alla temperatura t' avesse fuso la quantità di ghiaccio p', sotto le stesse condizioni precedenti avrebbe dato la quantità $\frac{p'}{m't'}$. E poichè questi numeri sono proporzionali alle quantità termiche perdute dai due corpi sotto masse eguali per discendere di 1° di temperatura; così il loro rapporto esprimerà quello delle capacità termiche dei due corpi.

Se il corpo fosse liquido, o quantunque solido avesse un'azione chimica sull'acqua, allora converrà chiuderlo in un cilindro metallico a sottili pareti,dopo aver determinato con esperienze preliminari il ghiaccio fuso dal solo cilindro, per poi sottrarne il peso da quello dell'acqua che si raccoglierà al termine dell'esperimento.

Quantunque il metodo del calorimetro si presenti così semplice, purtuttavia bisogna che siano adempiute talune difficili condizioni, per ottenerne risultati soddisfacenti. È d'uopo operare in uno spazio che abbia una temperatura di 2 a 3 gradi superiore a 0°, affinchè mentre si possa trascurare la quantità di acqua aderente ai frantumi di ghiaccio introdotti nell'apparecchio, si abbia nel tempo stesso la certezza di non aver adoperato un ghiaccio più freddo di 0°; nel qual caso la quantità calcolata di calore sarebbe mancante di tutto quello perduto nell'innalzare la temperatura del ghiaccio fino al punto della sua fusione. Nè val meglio sperimentare in uno spazio a 0°, poichè l'acqua prodotta dall'azione termica del corpo intromesso, ostruirebbe colla sua congelazione l'apertura del condotto, e l'esperienza resterebbe alterata da questa considerevole cagione perturbatrice. Se poi la temperatura dello spazio eccedesse 0° di assai gradi, allora oltre la molt'acqua che il ghiaccio porterebbe aderente, e di cui sarebbe impossibile valutare esattamente la quantità, vi sarebbe ancora l'influenza dell'aria chiusa nell'apparecchio, la quale col suo calore produrebbe la fusione di una certa quantità di ghiaccio. A questa condizione, che non può essere adempiuta che sotto taluni climi ed in certi giorni dell'anno,si aggiungano — 1° la necessità di operare con due calorimetri, uno dei quali contenendo soltanto ghiaccio, farà conoscere la quantità fusa dalla sola azione della cavità centrale e

dell'aria, rinchiusa — 2° la lunga durata di ogni sperimento, ed in conseguenza la considerevole quantità di ghiaccio necessaria a mantenere sempre piena la cavità esterna; e si comprenderà chiaramente la ragione per cui il metodo del calorimetro non è oggi che un'erudizione fisica.

Capacità termiche determinate col calorimetro da Lavoisier e Laplace.

Acqua comune	1,00000
Lastra di ferro	0,11051
Vetro senza piombo	0,19290
Mercurio	0,02900
Ossido rosso di mercurio	0,05011
Piombo	0,02819
Ossido rosso di piombo	0,06227
Stagno	0,04754
Solfo	0,20850
Olio di oliva	0,30961
Calce viva	0,21689
Mescolanza di acqua e calce viva nel rapporto di 9 a 16	0,43912
Acido solforico, dens. 1,87058	0,33160
Acido nitrico non fumante, dens. 1,29895	0,66139

Il metodo del calorimetro ritrova il calore specifico di un corpo in funzione della quantità di ghiaccio ch'esso fonde nel passare dalla temperatura t a 0°; e per avere la capacità termica riferita all'acqua, è d'uopo conoscere la quantità di calore necessaria a fondere l'unità di peso del ghiaccio. Lavoisier e Laplace determinarono questa quantità, e la trovarono eguale a quella ch'eleverebbe un'egual massa di acqua da 0° a 75° centigradi; quindi moltiplicarono per 75 i numeri dedotti dall'esperienza del calorimetro e così ottennero la tavola precedente. Questa valutazione indiretta delle capacità termiche rispetto all'acqua costituisce un'imperfezione del metodo, di cui parliamo; poichè oltre a rendere 75 volte più grandi gli errori inevitabili nell'assegnare i dati dell'esperienza, può ancora complicarli di quelli relativi alla determinazione del numero 75. E ciò che la semplice ragione di calcolo avreb-

be lasciato prevedere, è in realtà avvenuto: i sig. De la Provostaye e Desains ripetendo le sperienze sul calore di fusione del ghiaccio con quelle avvertenze, che lo stato della scienza non avrebbe saputo consigliare all'epoca delle ricerche di Lavoisier e Laplace, hanno ottenuto 79°,25 in vece di 75°. In conseguenza i numeri segnati nella tavola precedente dovranno essere moltiplicati per $\frac{79,25}{75}$, perchè rappresentassero le capacità termiche rispetto all'acqua. Eseguita questa correzione, essi diverranno meno divergenti dai valori delle stesse capacità determinate dai fisici posteriori, rispetto alle quali si trovano costantemente minori.

73. *Metodo del raffreddamento.* Questo metodo usato per la prima volta da Mayer, è stato poi perfezionato da Dulong e Petit. L'apparecchio adoperato da questi fisici è rappresentato dalla *fig.* 83 AB è una cassa cilindrica di rame, la cui faccia interna è coverta di nero fumo; C è un vasetto cilindrico di argento a sottili pareti, destinato a contenere il corpo, su cui si vuole sperimentare, già ridotto in polvere, ed in mezzo alla quale si trova il bulbo di un termometro che deve indicarne la temperatura; T è un tubo di piombo, che stabilisce la comunicazione tra la cassa AB ed una macchina pneumatica, onde il raffreddamento abbia luogo in uno spazio privo di aria; finalmente KD è un altro cilindro che circonda la cassa, e lo spazio interposto è pieno di neve per conservare l'interno dell' apparecchio alla temperatura costante 0°.

Volendosi eseguire l'esperimento, si pone il bulbo del termometro lungo l'asse del vase C, facendone passare il cannello per un foro che si trova nel coverchio del piccolo cilindro di argento; indi si apre il fondo di questo, e vi s'introduce la polvere, che alquanto compressa deve occupare tutto lo spazio che resta tra il bulbo del termometro e la faccia interna del cilindro. Così preparato il vase C si pone in un recipiente metallico circondato di acqua bollente; e quando il termometro indicherà che la polvere è arrivata al suo equilibrio di temperatura, si restituisce il vase C nella cassa di rame, si chiude l'apparecchio, e si fa rapidamente il vòto.

Poi si attende l'istante in cui il termometro segnerà 10°, e con un cronometro a secondi si misura il tempo che impiegherà per discendere a 5°. Chiamiamo t questo tempo, m, m', m'' le masse della polvere, del cilindro di argento e della porzione di termometro contenuta nel cilindro, x, c, c' le rispettive capacità; nel tempo t si sarà perduta per raffreddamento una quantità di calore proporzionale a $mx + m'c + m''c'$. Sperimentando sopra un altro corpo, la cui massa sia n, y la capacità e t' il numero de'secondi impiegati per raffreddarsi da 10° a 5°; avremo similmente una perdita di calore proporzionale a $ny + m'c + m''c'$. E poichè per un medesimo eccesso di temperatura e per uno stesso tempo il cilindro C emette la stessa quantità di calore; così le due perdite sopra notate dovranno essere proporzionali ai tempi t e t', e per ottenere il rapporto di x ad y avremo l'equazione

$$\frac{mx + m'c + m'' c'}{ny + m'c + m'' c'} = \frac{t}{t'}.$$

Non ostante l'alto grado di perfezione che il metodo del raffreddamento ha ricevuto dal modo di sperimentare di Dulong e Petit, purtuttavia esso suppone adempiute certe condizioni, talune delle quali sono inamminissibili nello stato attuale della scienza, altre sono già dimostrate insussistenti. Ed in vero questo metodo suppone — 1° che la temperatura indicata dal termometro sia la stessa che quella della sostanza che lo circonda; ipotesi che le leggi della conduzione termica rendono tanto meno probabile, in quanto ch'è noto essere le sostanze polverolente poco atte a trasmettere il calore da un punto all'altro della loro massa — 2° che la resistenza alla trasmissione del calore dal termometro alla polvere, e da questa alle pareti del recipiente che la chiude, sia la stessa per tutte le sostanze, mentre vi è ragione di credere ch'essa varî secondo i diversi corpi — 3° che il risultato dell'esperienza sia indipendente dalla compressione più o meno grande che la polvere ha sofferto quando è stata introdotta nel cilindro; e viceversa Regnault ha trovato che l'argento in polvere secondo il diverso grado

di compressione presenta una capacità termica, la quale varia da 0,08535 a 0,05616.

Capacità determinate da Dulong e Petit col metodo del raffreddamento.

NOMI DELLE SOSTANZE.	CAPACITA', facendo quella dell'acqua = 1.	PESI ATOMICI quello dell'ossigeno essendo = 1.	PRODOTTI.
Bismuto	0,0288	13,30	0,3830
Piombo	0,0293	12,95	0,3794
Oro.	0,0298	12,43	0,3704
Platino	0,0314	11,16	0,3740
Stagno.	0,0514	7,35	0,3779
Argento	0,0557	6,75	0,3759
Tellurio	0,0912	4,03	0,3675
Zinco	0,0927	4,03	0,3736
Rame	0,0949	3,957	0,3755
Nickel.	0,1035	3,69	0,3819
Ferro	0,1100	33,92	0,3731
Cobalto	0,1498	2,46	0,3685
Solfo	0,1880	20,11	0,3780

74. *Capacità termiche dei gas.* Le prime ricerche che offrirono risultati soddisfacenti sui calori specifici dei gas, furono quelle di Laroche e Bérard, il cui lavoro fu coronato dall'accademia francese delle scienze nel 1812. Il loro metodo consisteva nel far passare con celerità costante una certa quantità di gas per un serpentino che attraversava una cassa cilindrica piena di acqua. Prima di entrare in questo calorimetro il gas era riscaldato da una corrente di vapore che circuiva il tubo che lo conduceva; e due termometri situati l'uno al principio del serpentino e l'altro alla fine facevano conoscere le temperature colle quali il gas entrava ed usciva dal calorimetro. Determinato con esperienze preliminari il grado di calore a cui l'apparecchio giungeva nel suo equilibrio termico sotto le azioni opposte del calore ceduto dal gas, e di quello sottratto dal raffreddamento, i fisici summentovati avevano cura di elevare il calorimetro a quella temperatura prima che il gas co-

minciasse a percorrere il serpentino. Chiamando t la temperatura che il gas aveva nell'entrare, m la massa che percorreva il serpentino in $1'$, c la capacità ignota e θ la temperatura finale del calorimetro ; questo riceveva dal gas in $1'$ la quantità di calore $mc(t-\theta)$. D'altronde chiamando M la massa dell'acqua del serpentino e della cassa, dopo aver ridotto questi due ultimi pesi in ragione della capacità del metallo di cui erano formati, t' la temperatura del mezzo ambiente, e k la quantità di cui si sarebbe raffreddata l'unità di massa del calorimetro in $1'$ per l'eccesso di 1° sul mezzo ambiente; l'apparecchio in $1'$ perdeva la quantità di calore $Mk\ (\theta - t')$. E poichè nel fatto di una temperatura costante questa perdita doveva eguagliare l'aumento di calore che proveniva dal contatto del gas, così per determinare c si aveva l'equazione

$$mc\ (t - \theta) = Mk\ (\theta - t').$$

La costante k veniva determinata, osservando, in circostanze identiche a quelle dell'esperienza, il raffreddamento del calorimetro già riscaldato mediante l'azione di una lucerna.

Capacità dei gas determinate da Delaroche e Bérard.

NOMI DELLE SOSTANZE.	CAPACITA' a volumi egnali quella dell'aria essendo = 1.	CAPACITA' a masse eguali quella dell'aria essendo = 1.	CAPACITA' a masse eguali quella dell'acquaessendo = 1.
Aria atmosferica . .	1,0000	1,0000	0,2669
Idrogeno	0,9033	12,3401	3,2936
Ossigeno	0,9765	0,8848	0,2361
Azoto	1,0000	1,0318	0,2734
Ossido di carbonio. .	1,0340	1,0805	0,2884
Acido carbonico . .	1,2588	0,8280	0,2210
Ossido di azoto. . .	1,3503	0,8878	0,2369
Gas oliofaciente . .	1 5530	1,5763	0,4207
Vapore acqueo . . .	1,9600	3,1360	0,4870

Esaminando gli effetti termici della compressione e dell'espansione sui corpi aeriformi, abbiamo veduto (n° 67) ch'essi svolgono ca-

lore sotto un aumento di pressione, e viceversa ne assorbono dilatandosi. Or nelle sperienze di Delaroche e Bérard i gas, sottoposti soltanto alla pressione dell'atmosfera, si dilatavano mentre per l'azione del calore ricevuto si elevavano di temperatura; quindi se una pressione crescente avesse potuto impedire la loro espansione, colla stessa quantità di calore che avevano ricevuto, si sarebbero elevati ad una temperatura maggiore, ed in conseguenza avrebbero manifestata una capacità termica più piccola. Vi è dunque pei gas una duplice capacità termica; l'una a pressione costante e volume variabile, l'altra a pressione variabile e volume costante: la prima soltanto fu determinata per le sperienze di Delaroche e Bérard.

Rispetto alla seconda è da osservarsi che se la temperatura della massa m di un gas il quale sotto una pressione costante abbia la capacità c, si elevi di t gradi, la quantità di calore acquistata dal gas sarà mct. Se poi per un aumento di pressione il volume del gas si diminuisca di tutto l'accrescimento preso nell'elevarsi di t gradi, vi sarà un nuovo aumento di temperatura t'; quindi per ritornare il gas al grado primitivo, deve raffreddarsi di $t + t'$ gradi, e perdere una quantità di calore rappresentata da $mc'(t+t')$, c' indicando la sua capacità a volume costante. Or questa perdita dovendo eguagliare il calore ricevuto, avremo l'equazione

$$mct = mc'(t + t'),$$

donde

$$\frac{c}{c'} = 1 + \frac{t'}{t} = k.$$

Con un metodo tratto dalle leggi di vibrazione dei fluidi elastici e ch'esporremo nell'Acustica, Dulong ha trovato i seguenti valori di k.

Nomi dei gas.	*Valori di k.*
Aria atmosferica	1,421
Ossigeno	1,415
Idrogeno	1,407
Acido carbonico.	1,339
Ossido di carbonio	1,428
Ossido di azoto	1.343
Gas oliofaciente	1,240

Essendo la capacità di un gas funzione della pressione a cui è sottoposto, Poisson ha trovato che data la capacità c di un gas sotto la pressione di 760 millimetri di mercurio, la sua capacità x sotto la pressione di p millimetri sarà data dall'equazione

$$x = c\left(\frac{760}{p}\right)^{1-\frac{1}{k}}$$

75. Le capacità termiche variano ancora secondo le temperature dei corpi, come dimostrano i valori seguenti ottenuti da Dulong e Petit pel ferro, da Pouillet pel platino, e da Regnault per diverse altre sostanze.

Temperatura del ferro.	*Capacità medie.*
Da 0° a 100°	0,1098
— 0° a 200°	0,1150
— 0° a 300°	0,1218
— 0° a 350°	0,1255

Temperatura del platino.	*Capacità medie.*
100°	0,03350
300°	0,03434
500°	0,03518
700°	0,03602
1000°	0,03728
1200°	0,03818

Risultamenti ottenuti da Regnault col metodo del raffreddamento.

NOMI DELLE SOSTANZE	CAPACITA' da		
	20° a 15°	15° a 10°	10° a 5°
Antimonio	0,06424	0,06367	0,06305
Stagno in grani . .	0,05504	0,05546	0,05477
Stagno di Banca limato	0,05662	0,05614	0,05651
Zinco.	0,09123	0,09252	0,09142
Cadmio	0,05938	0,05969	0,05908
Bismuto	0,03639	0,03788	0,03732
Arsenico.	0,09019	0,09085	0,09006
Rame.	0,08847	0,08913	0,08842
Platino (spugna) . .	0,03509	0,03449	0,03509
Argento (limatura) .	0,05424	0,05458	0,05433
Soluzione di cloruro di calcio . .	0,6462	0,6389	0,6423
Alcool ordinario n° I.	0,6725	0,6651	0,6588
Alcool più debole n° II. . . .	0,8518	0,8429	0,8523
Alcool ancor più debole n° III . .	0,9752	0,9682	0,9770
Acido acetico . . .	0,6589	0,6577	0,6609

Regnault ha esteso le sue ricerche a molti altri liquidi, oltre quelli notati nella seconda parte di questa tavola. Abbiamo voluto soltanto citarne taluni risultamenti, per dimostrare che l'aumento di capacità termica non sempre va congiunto all'aumento di temperatura , a meno che le differenze non si debbano attribuire all' imperfezione stessa del metodo di raffreddamento.

CAPO QUINTO.

Cangiamento di stato dei corpi.

76. *Fusione dei solidi.* Se tra l' aumento continuo delle dimensioni dei solidi e l'elevazione crescente della loro tempera-

tura l'esperienza non ha ritrovato limite, necessariamente il progresso della dilatazione deve produrre tale indebolimento della forza di coesione da renderla minore della gravità: allora le molecole del solido perderanno la tendenza di durare nelle loro rispettive posizioni, e sottoposte ad una forza che spinge l'una indipendentemente dalle altre ad occupare il luogo più basso, esse acquisteranno quella relativa mobilità che forma la proprietà caratteristica dei liquidi.

In questa nozione di equilibrio molecolare tra le azioni opposte della coesione e del calore è facile dedurre che il grado di questo ultimo, necessario a produrre il passaggio da solido a liquido, deve variare secondo la natura del corpo, e che in generale dev' essere tanto meno elevato, per quanto il corpo è più dilatabile. Così vediamo che il platino, il meno dilatabile dei metalli, è quello che senza fondersi tollera altissime temperature.

Temperatura in gradi centesimali necessaria per la fusione di varie sostanze.

NOMI delle sostanze.	GRADI centesimali.
Ferro inglese battuto	1600
Ferro dolce francese	1500
Acciaio il meno fusibile	1400
Acciaio il più fusibile	1300
Ferro fuso combinato con manganese	1250
Ferro fuso bigio, 2.ª fusione	1200
Idem molto fusibile.	1100
Ferro fuso bianco, poco fusibile	1100
Idem molto fusibile	1050
Oro purissimo	1250
Oro ai titolo delle monete	1180
Argento purissimo	1000
Bronzo	900
Antimonio	432
Zinco	360
Piombo	334
Bismuto	256
Stagno	230
Lega di 5 atomi di stagno ed 1 di piombo	194
— 4 stagno, 1 piombo.	189
— 3 stagno, 1 piombo.	186
— 2 stagno, 1 piombo.	196
— 1 stagno, 1 piombo.	241
— 1 stagno, 3 piombo.	289
— 3 stagno, 1 bismuto	200
— 2 stagno, 1 bismuto	167,7
— 1 stagno, 1 bismuto	141,2
— 1 piombo, 4 stagno, 5 bismuto	118,9
Solfo	109
Iodo	107
Lega di 2 piombo, 3 stagno, 9 bismuto	100
— 5 piombo, 3 stagno, 8 bismuto	100
— 4 bismuto, 1 piombo, 1 stagno.	94
Sodio	90
Potassio	58
Fosforo.	43
Acido stearico	70
Cera bianca	68
Cera non imbianchita	61
Acido margarico.	55 a 60
Stearina.	43 a 49
Spermaceto.	49
Acido acetico.	45
Sego	33
Ghiaccio	0
Olio di terebentina.	—10
Mercurio	—40

Ma ciò che nel fenomeno della fusione l'idea di equilibrio molecolare non avrebbe lasciato prevedere, è la perdita di forza calorifera che ha luogo nel passaggio da solido a liquido. In una massa M di acqua alla temperatura di t gradi sopra 0°, immergiamo una massa m di ghiaccio, e notiamo la temperatura t' prodotta dalla sua fusione. Se l'acqua non avesse comunicato al ghiaccio altro calore che quello necessario ad elevarne la temperatura da 0° a t', allora tra la quantità di calore M $(t - t')$ perduta dall'acqua e la quantità mt' guadagnata dal ghiaccio vi

dovrebbe essere un'eguaglianza almeno approssimata. Al contrario l'esperienza presenta il primo numero di tanto superiore al secondo, da non poterne attribuire l'eccesso ad influenza di cagioni perturbatrici. Vi è dunque realmente una perdita di calore nell'atto della fusione del ghiaccio; e chiamando x la quantità di gradi, di cui questo calore eleverebbe la temperatura di un'egual massa di acqua, avremo che $m(x + t')$ dovrà rappresentare il calore assorbito dal ghiaccio immerso. Quindi l'equazione

$$M(t - t') = m(x + t'),$$

donde

$$x = \frac{M}{m}(t - t') - t'.$$

Con questo metodo di mescolanza Black scovrì il fatto del consumo di forza calorifera nell'atto della fusione; ma le cognizioni fisiche del suo tempo non concedevano di determinare m e $t - t'$ con sufficiente esattezza. E daltronde dovendo M superare di molto m, perchè la fusione avvenga celeramente, è chiaro che un piccolo errore nella valutazione di m, o di $t - t'$ può produrne uno assai grande in quello di x. — Dalle sue sperienze Black ottenne $x = 77°,25$, vale a dire che il calore consumato nella fusione del ghiaccio eleverebbe da 0° a 77°,25 un'eguale massa di acqua.

In seguito Wilcke cercò risolvere lo stesso problema, prendendo due bicchieri per quanto gli fu possibile perfettamente eguali: riempì l'uno di acqua a 0°, e l'altro di neve anche a 0°; ed in ciascuno dei bicchieri pose un termometro. Circondando di acqua bollente i due recipienti, egli osservava che quando la neve era interamente fusa senza che il termometro si fosse elevato al disopra di 0°, la temperatura dell'altro bicchiere era giunta a 72°. Quindi egli riguardò questo numero come valore dell'energia termica consumata per la fusione della neve.

Il numero trovato da Wilke fu adottato da tutti i fisici fino all'epoca delle ricerche calorimetriche di Lavoisier e Laplace. Questi due fisici versarono una certa quantità di acqua calda

sul ghiaccio di cui era pieno l'interno del calorimetro; e dalla quantità di acqua a 0° prodotta dalla fusione del ghiaccio essi rilevarono il calore consumato da quest'ultimo. In un'altra sperienza riempirono di acqua calda un piccolo recipiente metallico, e l'introdussero nel calorimetro, dopo aver determinato la quantità di ghiaccio fuso dall'azione termica del solo recipiente introdotto alla temperatura che aveva l'acqua calda; quindi riuscì facile determinare la quantità di ghiaccio fuso dalla sola azione del liquido. Prendendo un valore medio dei risultamenti ottenuti, essi stabilirono il calore di fusione del ghiaccio eguale a 75°.

Sessanta anni dopo (1843) De la Provostaye e Desains ritornarono sulla quistione del calore di stato dell'acqua. Essi seguirono il metodo delle mescolanze, il solo capace di esatta precisione; e correggendo i risultamenti dell'esperienza di quegli errori che lo stato presente della scienza concede di valutare, ottennero per x il numero 79,25, che fu poi confermato dalle ricerche di Regnault.

Per determinare le quantità M ed m della formola precedente De la Provostaye e Desains pesarono insieme il recipiente, l'acqua ed il termometro sì prima che dopo della mescolanza. L'eccesso del secondo peso sul primo non dava esattamente quello del ghiaccio, poichè durante l'esperimento l'acqua soffriva per evaporazione una perdita, la quale diminuiva il peso di M nel tempo decorrente tra l'istante della prima pesata e quello dell'immersione, e tra questo e quello della seconda pesata diminuiva ancora m. Mediante ricerche preliminari furono determinate queste perdite in funzione del tempo, affinchè notati gl'instanti della 1ª pesata, dell'immersione e della 2ª pesata, fossero note le correzioni da farsi ad M e m.

Il recipiente e la porzione immersa del termometro partecipando alla diminuzione di temperatura che l'acqua pativa per la fusione del ghiaccio, venivano a somministrare calore in ragione della loro capacità termica: per ciò ne furono ridotti i pesi secondo questa ragione ed aggiunti a quello di M.

Finalmente un'ultima correzione riguardò l'influenza del mezzo

ambiente sul valore di t'; poichè se l'acqua perdeva calore per la fusione del ghiacclo, ne perdeva ancora pel contatto dell'aria e per irradiazione. Determinando con apposite sperienze la celerità di raffreddamento dell'acqua calda di più gradi sulla temperatura del mezzo ambiente, i summentovati fisici conobbero la correzione da farsi a t'.

In tal modo si trovò $x = 79^{\circ},25$, vale a dire che nell'atto della fusione del ghiaccio si perde una quantità di forza calorifera che eleverebbe da 0° a $79^{\circ},25$ un'egual quantità di acqua.

77. Quando la temperatura del corpo è giunta al grado della sua fusione, ogni quantità di calore comunicata al corpo non farà che accelerare il cangiamento di stato, ma se questo non è compiuto, non potrà elevarne la temperatura. Gli accademici del Cimento riempirono di ghiaccio trito un vase di piombo contenente un termometro; e tuffato il vase nell'acqua bollente, il termometro restò al grado che prima aveva, finchè non venne fuso il ghiaccio che lo circondava. Deluc, volendo ripetere l'esperimento degli accademici del Cimento, pose ad agghiacciare l'acqua pura, con entro un termometro, in un ambiente di parecchi gradi sotto zero: l'acqua divenne bentosto gelata ed il termometro immerso segnò la temperatura del mezzo ambiente. Ma quando il vase venne esposto al fuoco, il termometro si elevò a 0°, fermandosi a questo grado finchè restò circondato di ghiaccio.

78. Ammessa l' ipotesi che il calore sia effetto di un fluido speciale, e che la sua azione sia proporzionale alla quantità che un corpo ne contiene, la perdita di energia termica osservata nella fusione di un solido si deve necessariamente attribuire ad una certa quantità di fluido calorifero talmente impegnata tra le particelle del corpo da non poter rivolgere la sua attività sul termometro che n'è a contatto. È questa una nuova dose di *calorico latente,* che si aggiunge a quella occasionata dalla varia capacità termica, e che dalle circostanze in cui si produce è denominata *calorico di fusione* o *calorico di stato.* E quantunque non sia facile comprendere la ragione di questo

salto nella progressione del calore latente, poichè dalla dilatazione alla fusione non vi è che una serie crescente secondo la legge di continuità; purtuttavia l'idea di un calore di stato non si può eliminare, finchè si conserva l'ipotesi, donde necessariamente deriva.

Fin qui l'andamento del sistema è logico, poichè rispetta le conseguenze dei principî stabiliti, ancorchè non siano approvate dal buon senso. Era d'uopo purtuttavia non confondere le illazioni dei principî certi con quelle che derivano da concetti ipotetici. Le prime, reali come le sorgenti donde fluiscono, possono offrire un metodo di misura indiretta; e quando ci siamo assicurati di non aver negletto verun elemento del valore che vogliamo determinare, le conseguenze del calcolo avranno pel nostro spirito tanta realtà obbiettiva, per quanta ne ha il principio donde deriva. Così mercè il valore dalla parallasse solare, e le relazioni scoverte dalla Trigonometria tra i lati e gli angoli di un triangolo, l'astronomo trova di quanti raggi terrestri il sole dista da noi; e questa distanza è tanto certa per l'astronomo, per quanto lo sono il valore della parallasse ed i teoremi trigonometrici. Al contrario le deduzioni dei principî ipotetici non possono mai servire di base ad una misura indiretta, poichè non misuriamo le grandezze per averne valori possibili, ma valori reali. Se le proposizioni trigonometriche, invece di avere certezza matematica, fossero semplici supposizioni, potremmo frenare il riso, quando gli astronomi asserissero che la stella a noi più vicina è almeno dugento mila volte più lontana che il sole? Intanto i fisici sostengono seriamente principî di un egual valore logico. A voler misurare, per esempio, direttamente il calore di stato del piombo, bisognerebbe avere una massa liquida di questo metallo ad una temperatura assai più alta del suo grado di fusione; immergere in essa un pezzo di piombo, e quindi determinare il raffreddamento che per la sua liquefazione verrebbe prodotto in tutta la massa. In vece di questo metodo diretto, che presenterebbe grandi difficoltà nell'esecuzione, si è pensato determinare viceversa il calore che il

corpo svolge, quando si congela per immersione in una massa di acqua; poichè si è detto che quel calore ch'è divenuto latente nell'atto della fusione, deve necessariamente ritornar libero nell'opposta mutazione di stato. Si è voluto così determinare un valore reale seguendo le indicazioni di una semplice ipotesi; e non solamente si sono ottenuti numeri che non valgono nulla rispetto allo scopo dell'esperimento, ma (ciò che maggiormente importa) si è messa la scienza sopra una falsa strada. E tutto questo nell'ipotesi, che il fluido calorifero non altrimenti agisca che come massa; poichè se volessimo seguire l'ipotesi delle vibrazioni, alla quale non si può negare una certa verosimiglianza, allora l'idea di un calore nascosto tra le molecole della materia ponderabile non potrebbe reggere affatto, poichè come mai potremmo noi concepire una vibrazione latente?

79.*Trasformazione dei liquidi in vapori.*Se la forza di aggregazione tende a ridurre solidi tutti i corpi, quella del calore viceversa tende trasformarli tutti in fluidi elastici: e se lo stato solido si distingue dal liquido per essere nel primo la forza di coesione maggiore della gravità e minore nel secondo; nello stato aeriforme poi la coesione è interamente vinta dalla forza ripulsiva del calore, giacchè i corpi che si presentano in questo stato, hanno un'espansione indefinita.

Il passaggio dello stato solido al liquido abbiamo veduto compiersi sotto una temperatura definita dalla speciale natura del corpo, e che un ulteriore riscaldamento della massa lungi dall'accrescere il grado di calore, non faceva che accelerare la fusione. La gassificazione al contrario non presenta un grado determinato, ma in vece due limiti di temperatura, fuori dei quali o essa è impossibile, ovvero è già compiuta. Così Faraday ha osservato che chiudendo con una foglia di oro l'orifizio di un vase contenente mercurio, la foglia non diveniva bianca se la temperatura era —4°C.; dunque a 4° sotto 0° il mercurio non dà vapore sensibile. Or se poniamo lo stesso liquido in un recipiente di vetro, e lo riscaldiamo colla fiamma di una lucerna; osserveremo la sua temperatura gradatamente elevarsi fino a 360°, che segna il grado della

sua ebollizione, vale a dire di una rapida trasformazione in vapore. La gassificazione del mercurio ha dunque luogo tra i limiti — 4° e 360° della scala centigrada. Secondo le sperienze di Bellani l'acido solforico presenta ancora i due limiti di gassificazione. L'acqua poi nel suo stato liquido non offre che il limite superiore, poichè non solo svapora alle temperature più basse, ma eziandio nello stato di ghiaccio. Se, per esempio, in un'aria asciutta e di qualche grado inferiore a 0° equilibriamo in una bilancia un pezzo di ghiaccio, dopo qualche tempo la troveremo inclinata dal lato dei pesi: pruova evidente della riduzione di una parte del ghiaccio in vapore.

La quantità di vapore che un corpo può dare in dato tempo, dipende

— 1° Dall'estensione della superficie libera che il corpo presenta alle spazio ambiente. Così vediamo che l'acqua diffusa sopra un piano, lo lascia ben presto asciutto; mentre la stessa quantità di liquido avrebbe potuto durare più mesi in un recipiente a stretto orifizio.

— 2° Dal grado di calore. — Un pannolino bagnato si asciuga più presto sotto l'azione diretta dei raggi solari che nol faccia colla semplice esposizione all'aria libera.

— 3° Dalla quantità dello spazio — Saussure ha osservato che l'acqua lasciata svaporare in uno spazio circoscritto e perfettamente asciutto, svolge tale quantità di vapore a 15° R. che ogni piede cubico ne contiene un peso di circa 10 granelli; e che questo peso sotto la stessa temperatura è costante, sia lo spazio occupato dall'aria, da un gas qualunque, o del tutto vôto, Sperienze dirette hanno ancora dimostrato che se in uno spazio definito vi sia un dato vapore, un liquido qualunque che non vi abbia veruna azione chimica, somministrerà la quantità di vapore dovuta allo spazio ed alla temperatura, indipendentemente dalla presenza del primo. Nel libro seguente esporremo più precise relazioni tra lo spazio, la temperatura e la quantità massima di vapore che vi può essere contenuta.

— 4° Dalla varia pressione che il corpo riceve dal mezzo ambien-

te — Per ben dichiarare questa influenza è d'uopo premettere la spiegazione del fenomeno dell'ebollizione.

Quando un vase pieno di liquido viene adagiato sopra un fornello, il calore comunicato al fondo del recipiente invade la prima falda liquida che gli è a contatto, la dilata, e quindi fatta più leggiera è costretta di venire a galla. Alla prima falda tengono dietro la seconda, la terza, ec.; e così nella massa liquida si stabiliscono due correnti, l'una ascendente calda e l'altra discendente fredda. Esponendo all'azione di una fiamma un recipiente di cristallo (*fig.* 85) che contenga acqua, la quale abbia in sospensione un poco di segatura di legno, si renderanno visibili le due correnti, l'una che discende presso la parete del recipiente e l'altra che ascende per lo mezzo. Mercè questo continuo movimento l'acqua prenderà una temperatura sempre più elevata, finchè la falda liquida che tocca il fondo, non si riduca tutta in vapore. Allora le bolle che si alzano dal fondo, producono nel liquido quella viva agitazione che costituisce il fenomeno dell'ebollizione.

Quantunque l'acqua riducendosi in vapore acquisti un volume parecchie centinaia di volte più grande, purtuttavia perchè si producano quelle grosse bolle che nell'atto dell'ebollizione vengono a rompersi alla superficie del liquido, è necessario che lo strato il quale deve tutto ridursi in vapore, abbia una certa doppiezza. Or tutti i cangiamenti delle grandezze continue, e tra queste è d'annoverarsi l'azione termica, sono del pari sottoposti alla legge di continuità; ed in conseguenza priachè il calore trasmesso pel fondo del recipiente abbia l'energia di trasmutare in vapore uno strato liquido alquanto doppio, centinaia di altri strati di una spessezza crescente, e che il movimento vorticoso del liquido ha successivamente recato in contatto del fondo, si saranno gia ridotti in vapore formando quella serie di bollicine che si veggono salire dal fondo dell'acqua prossima a bollire, e che producono nel recipiente una certa vibrazione, donde quel suono foriero dell'ebollizione.

Questo passaggio dei liquidi a vapore per mezzo dell'ebollizione avviene a differenti temperature secondo i diversi liquidi, come si rileva dalla tavola seguente.

Temperatura dell'ebollizione di diversi liquidi sotto la pressione ordinaria dell' atmosfera.

Etere solforico	37,3
Carburo di solfo	47,0
Alcool	79,7
Olio di terebentina	157,0
Fosforo	290,0
Solfo	299,0
Acido solforico	310,0
Olio di lino	316,0
Mercurio	360,0

Il continuo passaggio del calore dal fondo del recipiente alla falda liquida che lo preme, rende ragione di un fatto a prima vista sorprendente. Prendete un recipiente fatto di lamina metallica e ben terso all'esterno: pieno in parte di acqua adagiatelo sopra un fornello ben animato, e quando il liquido è in piena ebollizione, e che la fiamma colpisce con forza il fondo del recipiente, sollevate il vase dal fuoco ed avvicinate la mano al fondo; e resterete meravigliato di non trovare che un moderato calore, ove supponevate rinvenirlo ardente. Quindi comprendiamo, perchè una caffettiera di latta messa vota sui carboni accesi, lascia bentosto cadere il fondo per la fusione della saldatura che lo univa; mentre piena di acqua può stare per più ore esposta ad un fuoco vivo, senza che la saldatura del fondo resti liquefatta.

Da quest'analisi del fenomeno si rileva che l'ebollizione non è che l'evaporazione nel limite superiore di temperatura. I fisici hanno stimato doverla indicare col nome speciale di *vaporizzazione*; ma questa distinzione necessaria quando la lenta evaporazione che muove dalla superficie del liquido veniva attribuita alla forza dissolvente dell'aria, si oppone viceversa all'unità della teoria or che sappiamo esser la trasformazione in vapore interamente dovuta alla forza del calore, qualunque sia il punto della massa liquida, da cui comincia. E se le leggi che andremo esponendo non sono rigorosamente dimostrate che rispetto all'ebollizione,

ciò è avvenuto perchè l'agitazione del liquido rende avvertito il fisico dell'istante in cui l'ebollizione comincia, mentre l'evaporazione che muove dalla superficie sfugge ordinariamente all'attività dei sensi. Ma l'analogia dietro la conoscenza dell'identità della cagione ci autorizza ad ammettere l'identità della legge, qualunque sia il modo dell'evaporazione.

Premesse queste nozioni, passiamo a dichiarare l'influenza della pressione sulla trasformazione dei liquidi in vapore — Si prendano due recipienti pressochè eguali, della stessa materia, e si riempiano di acqua tolta dalla stessa sorgente. Immerso in ciascuno di essi un termometro che vada perfettamente di accordo coll'altro, si lasci uno dei recipienti a livello del suolo, si trasporti l'altro sopra un'alto terrazzo, e si esponga ciascuno di essi all'azione di una fiamma. Al momento dell'ebollizione i due termometri non segneranno la stessa temperatura, quella del termometro immerso nel vase a livello del suolo sarà, benchè di poco, maggiore dell'altra. Ma se la distanza in altezza tra i due punti di osservazione fosse considerevole, come sarebbe tra il livello del mare e la sommità di un monte, allora la differenza di temperatura potrebbe essere di parecchi gradi: così mentre l'acqua bollente ha 100° di temperatura al livello del mare, non ne ha che 92°,9 all'ospizio del San Gottardo, e ne avrebbe appena 84° sulla sommità del Monte Bianco. L'influenza della pressione sul grado di calore dell'acqua bollente può essere dichiarata anche nell'interno di una stanza sperimentando con un termometro, come viene rappresentato dalla *fig.* 92. Esso è formato da un cannello sottilissimo, che nella sua lunghezza presenta la pallina C, nella quale si raccoglie il mercurio dilatato dall'azione del calore; e la quantità di questo liquido è proporzionata in modo che esso non esce dalla pallina C che verso i 96 in 97 gradi; in conseguenza i pochi gradi che restano a segnarsi sul cannello C*e* possono per la sottigliezza del tubo, aver ciascuno la lunghezza di due pollici, e quindi rendere sensibili anche i centesimi di grado. Con un termometro così costruito la temperatura dell'acqua bollente presenterà una differenza, quantunque piccolissima, per una

distanza in altezza di 5 a 6 piedi; e se avremo inoltre un barometro (di cui parleremo nel libro seguente) potremo osservare che fermato il luogo all'apparecchio di ebollizione, la sua temperatura varierà secondo il diverso valore della pressione atmosferica: quindi la necessità di fissare una pressione normale per la gradazione de'termometri.

Ma per osservare l'effetto della pressione sopra una scala più estesa è d'uopo diminuirla o aumentarla oltre i limiti delle variazioni barometriche e delle altezze accessibili. Poniamo, per esempio, sotto la campana di una macchina pneumatica un bicchiere con acqua a circa 30° di temperatura, e vedremo che basteranno pochi colpi di stantuffo per mettere l'acqua in completa ebollizione. D'altronde il sig. Cagniard de la Tour chiudendo l'acqua in forti tubi di vetro, di cui essa occupava circa il quarto della capacità e riscaldando i tubi, dopo averli ben purgati di aria e chiusi ermeticamente, ha veduto l'acqua scomparire ad una temperatura di circa 360°. L'etere, l'alcool ed il solfuro di carbone cimentati allo stesso modo, il primo si è ridotto in vapore a 259° occupando un volume triplo, il secondo in un volume doppio si è vaporizzato a 210°, e colla stessa ragione di volume il terzo si è trasformato in vapore a 275°. Similmente nell'apparecchio denominato *pignatta di Papin* l'acqua può tollerare altissime temperature. È questo un cilindro di bronzo o di ferro fuso (*fig.* 84) il cui coverchio a vite ha una piccola apertura chiusa da una valvola ivi mantenuta da un braccio di leva gravato da un peso. Quando il vapore accumulato sulla superficie del liquido vince la resistenza che oppone la valvola, questa si apre ed il vapore sfugge celeramente. Laonde facendo variare il peso da cui è gravato il braccio di leva, l'acqua contenuta nella pignatta può prendere una temperatura più o meno elevata, prima che potesse ridursi in vapore per l'orifizio del coverchio; ma l'aumento del peso non può eccedere la resistenza delle pareti del cilindro, senza che l' apparecchio vada soggetto ad un orribile esplosione.

L'influenza della pressione sull'ebollizione dei liquidi rende ragione del seguente fenomeno. Si prenda un piccolo pallone di

vetro terminato da un tubo (*fig.* 91) si riempia in parte di acqua, e si esponga all'azione di una fiamma finchè il liquido entri in ebollizione : allora si chiuda con un turacciuolo il tubo, e si capovolga l'apparecchio. In questo stato l'ebollizione sarà cessata, ma ricomincerà facendo cadere sul pallone un poco di acqua fredda, e poi cesserà di nuovo facendovi cadere dell'acqua calda. L'azione del freddo addensando il vapore accumulato nella parte superiore del pallone, diminuisce la pressione sul liquido e facilita lo svolgimento di nuovo vapore, il quale è poi arrestato dall'aumento di pressione che l'azione dell'acqua calda produce mediante l'espansione del vapore già esistente.

Varia ancora il grado di ebollizione secondo la natura dei recipienti, e le sostanze disciolte nel liquido. Così l'acqua nei vasi di vetro bolle ad una temperatura più elevata che nei vasi metallici; ma basta immergere nei primi un poco di limatura di ferro, per vedere annullata la differenza di temperatura. Ordinariamente però avviene che quando l'ebollizione è ritardata sia dalla natura del recipiente, sia dalle sostanze disciolte nel liquido, l'ebollizione si esegue a salti, che producono degli urti nel recipiente: così non di rado l'acido solforico rompe le storte di vetro in cui si fa bollire. Purtuttavia vi sono sostanze che impediscono la produzione di questo fenomeno: dei pezzetti di platino, per esempio, sono sufficienti a rendere placida l'ebollizione dell'acido solforico; lo zinco ed il ferro fanno altrettanto per l'acqua bollente in vasi di vetro, mentre il tartrato neutro di potassia rende gli urti più forti. Pare che questo fenomeno provvenga dall'adesione dei liquidi alle pareti dei recipienti, poichè suole accompagnare il distacco di grosse bolle di vapore che sono per qualche tempo restate aderenti alla superficie del fondo; ma l'azione opposta del ferro per l'acqua, e del platino per l'acido solforico, non è facile ad essere dichiarata.

Rispetto all'influenza delle sostanze disciolte si sono ottenuti i seguenti risultamenti dalle ricerche di Legrand.

NOMI DELLE SOSTANZE.	PUNTO DI EBOLLIZIONE in centigradi.	QUANTITA' DI SALE che saturano 100 di acqua.
Clorato di potassa	104,2	61,5
Cloruro di bario	104,4	90,1
Carbonato di soda	104,6	48,5
Fosfato di soda	106,5	113,2
Cloruro di potassio	108,3	59,4
Cloruro di sodio	108,4	41,2
Idro-clorato di ammoniaca. .	114,2	88,9
Tartrato neutro di potassa .	114,67	296,2
Nitrato di potassa	115,9	335,1
Cloruro di strontio	117,9	117,5
Nitrato di soda	121,0	224,8
Acetato di soda	124,37	209,0
Carbonato di potassa . . .	135,0	205,0
Nitrato di calce	151,0	362,2
Acetato di potassa	169,0	798,2
Cloruro di calcio	179,5	325,0
Nitrato di ammoniaca . . .	180,0	infinito

Finalmente il grado di ebollizione dipende, almeno per l'acqua, dalla quantità di aria che vi è disciolta, la quale è probabile che agisca diminuendo la coesione del liquido. Deluc esponendo al fuoco l'acqua compiutamente privata di aria, la vide riscaldarsi fino a 121° C. senza bollire; e recentemente Donny l'ebbe a 135. C. riscaldandola in vasi chiusi.

80. L'evaporazione si compie sempre con sottrazione di calore dal corpo donde muove. Quel freddo, che proviamo nell'uscire dal bagno, provviene dall'evaporazione dell'acqua che resta aderente al nostro corpo; ed il leggiero calore che abbiamo detto incontrarsi sul fondo di un recipiente metallico nel toglierlo dal fornello mentre l'acqua è bollente, è una novella pruova della perdita di calore cagionata dalla formazione del vapore.

L' apparecchio indicato dalla *fig.* 88 serve a presentare lo stesso fatto sotto novella forma. Esso si compone di un tubo di vetro voltato due volte ad angolo retto, e terminato da due palle

della medesima sostanza: è in parte pieno di alcool, ed il resto dello spazio interno è stato vôtato di aria per mezzo dell'ebollizione del liquido. Dopo aver girato l'apparecchio in modo che il liquido resti diviso tra le due palline, si circondi una di esse con neve e sale, e bentosto si vedrà l'altra appannarsi di rugiada. Questo condensamento di vapore atmosferico sul vetro ne dimostra il raffreddamento; il quale è prodotto dall'evaporazione dell'alcool accelerata dalla successiva liquefazione del vapore alcoolico a misura che perviene nella pallina circondata di neve. Collo stesso apparecchio si può sperimentare ancora nel seguente modo. Girando in alto le palline, se ne impugni una: allora il calore della mano vaporizzando una parte dell'alcool, il resto del liquido sarà spinto nell'altra pallina; e quando l'espansione del vapore vi avrà cacciato tutto il liquido, proveremo nella mano una sensazione di fresco prodotto dall'evaporazione di quell'ultimo velo liquido che l'alcool uscendo dalla pallina aveva lasciato sull'interna superficie di essa.

Mediante questo principio si rende ragione del metodo usato in Egitto e nel mezzogiorno della Spagna per ottenere l'acqua fresca nel forte calore della state. Il liquido si pone in vasi di argilla assai porosi, che si sospendono in luoghi non esposti all'azione diretta dei raggi solari: pei pori del vase l'acqua trapela continuamente e viene ad esporsi alla superficie del recipiente che resta sempre bagnata; così la sottrazione del calore è continua, ed il liquido conserva una temperatura di più gradi inferiore a quella del mezzo ambiente. Nelle Indie per avere una corrente di aria fresca nell'interno delle abitazioni, si chiudono le finestre con graticci di ramoscelli che vengono bagnati di tempo in tempo; l'aria che vi penetra, cede porzione del suo calore all'acqua che lo consuma per evaporazione, e così la sua temperatura si abbassa di parecchi gradi.

Il freddo prodotto da un'accelerata evaporazione può giungere al grado di congelare non solo l'acqua, ma eziandio il mercurio. Sotto una campana pneumatica si ponga un largo vase di vetro pieno di acido solforico, e su questo una sottile capsula metallica

con acqua, sostenuta da tre listarelle metalliche che poggiano sull'orlo del vase di vetro. Facendo il vôto, l'acqua svolge copioso vapore che viene immediatamente assorbito dall'acido solforico: in tal modo un'accelerata evaporazione diviene continua, ed il raffreddamento che l'acqua residua ne riceve, non tarda a produrne la congelazione. Questo sperimento è dovuto a Leslie.

Per ottenere poi la congelazione del mercurio, basta circondare con un pezzetto di spugna la pallina di un termometro, indi bagnarla con carburo di solfo, o con acido solforoso liquido: l'intenso raffreddamento prodotto dall'evaporazione di uno di questi liquidi al sommo volatili, produrrà bentosto la congelazione del mercurio.

81. Nel 1757 Leidenfrost scovrì che facendo cadere delle gocce di acqua sopra una lamina rovente, invece di ridursi istantaneamente in vapore, esse si compongono in una sola goccia, che prende un rapido movimento di rotazione e talvolta anche di traslazione, e finisce col ridursi lentamente in vapore. Questo fenomeno è stato obbietto di ricerche per molti fisici; e le recenti indagini del sig. Boutigny hanno in parte confermato i risultamenti dei suoi predecessori; e ne hanno presentato dei nuovi oltremodo rimarchevoli. Egli lo disegna sotto il nome di *stato sferoidale dei liquidi* o di *fenomeno di calefazione.*

Tutti i corpi capaci di ridursi in vapore passando per lo stato liquido, possono assumere lo stato sferoidale in contatto delle lamine roventi. Nè la temperatura della lamina dev'essere sempre altissima, ma piuttosto dipendente dalla natura del metallo che si riscalda e da quella del liquido che vi cade. Col platino Boutigny ha ottenuto la calefazione dell'acqua a 200° ed anche a 171°, e coll'argento a 142.°: per l'etere poi è stata sufficiente la temperatura di 61°. Ed in generale la lamina vuol essere tanto più riscaldata, per quanto è più elevata la temperatura dell'ebollizione del liquido.

Immergendo nel liquido calefatto il bulbo di un termometro espressamente costruito, Boutigny vi ha trovato una temperatura inferiore a quella della sua ebollizione. Per l'acqua egli ha

ottenuto 96°,5, l'alcool 75°,5, l'etere 34°,25, e — 10°,5 per l'acido solforoso liquido. Quindi si comprende la ragione del seguente fatto, ch'è senza dubbio l'effetto più meraviglioso che siasi ottenuto dal giuoco delle forze molecolari. Ottenuto lo stato sferoidale dell'acido solforoso in una capsula riscaldata al calor bianco, vi si versi a goccia a goccia un poco di acqua distillata, e questa verrà congelata all'istante: operando in un'aria alquanto umida, il semplice assorbimento del vapore atmosferico produrrà un ghiacciuolo sulla goccia calefatta di acido solforoso. Variando il modo di sperimentare il Boutigny ha ottenuto lo stesso risultamento sotto una forma più sorprendente. Egli fece riscaldare al calore bianco la muffola di un fornello a coppella, ed arroventare al fuoco una capsula di platino: in questa versò un grammo di acido solforoso anidro, e poi chiuse nella muffola la capsula di platino, lasciando libero un piccolo spazio pel passaggio dell'aria, e per poter osservare il liquido. Se l'aria ambiente era umida, il vapore atmosferico si congelava sull'acido calefatto, quantunque chiuso in un recinto ad altissima temperatura.

Il liquido calefatto si tiene ad una certa distanza dalla lamina riscaldata. Facendo l'esperienza di notte, e situando una candela in modo che il mezzo della fiamma si trovi all'altezza della lamina, posto l'occhio nella giusta posizione si vedrà senza interruzione il lume della candela tra la lamina e la sferoide calefatta. Se questa facesse rapide oscillazioni verticali sulla lamina l'effetto sarebbe lo stesso, poichè le impressioni sull'organo della vista che si succedono con intervallo minore di un decimo di secondo, producono una sensazione continua. Ma questa ipotesi non è ammisibile, poichè Poggendorf ha osservato che tra la lamina e la goccia calefatta non passa la corrente voltaica, pruova (come vedremo nel libro sull'elettricità) di una separazione non interrotta tra i due corpi.

Prima di Boutigny i fisici per rendere ragione della bassa temperatura dei liquidi calefatti, in paragone dell'eccessivo calore della lamina su cui cadono, supponevano che il calore raggiato

dal corpo rovente traversasse la goccia liquida senza riscaldarla. Le seguenti sperienze di Boutigny pruovano in vece che il calore raggiato dalla lamina è in massima parte riflesso dalla superficie della goccia. Con apposito sostegno egli fermò a 2 millimetri dal fondo di una capsula di platino rovente la sfera di un piccolo matraccio contenente un centimetro cubico di acqua; e questa non tardò ad entrare in ebollizione: dunque il calore raggiato dalla capsula era assorbito dal vetro e comunicato all'acqua. Ripetè lo stesso sperimento, ma in modo che la sfera del matraccio fosse stata circondata da una goccia di acqua calefatta, e l'ebollizione di quella contenuta nel matraccio non ebbe più luogo. Nè tampoco potè ottenerla, sciogliendo previamente nel liquido da calefarsi una certa quantità di nero fumo, di cui è noto il potere assorbente del calore. Aggiungasi inoltre che se il liquido calefatto era l'acido solforoso, bastava immergervi per mezzo minuto la sfera del matraccio, perchè l'acqua in esso contenuta si trovasse gelata.

82. *Congelazione dei liquidi* — Le particelle di un liquido, da cui si fa continua sottrazione di calore, possono per la loro distanza sempre decrescente entrare in quella sfera di energia della forza di aggregazione che rende la coesione superiore alla gravità; ed allora il liquido diverrà solido.

Il grado di temperatura necessaria alla congelazione di un liquido, oltre alla parte che vi prende la sua speciale natura, dipende ancora da talune condizioni, della cui influenza non si può tuttavia rendere ragione. Gli accademici del Cimento avvertirono i primi nulla essere tanto variabile, quanto la temperatura della congelazione dell'acqua; e ch'essa prossima a gelarsi, si agghiaccia in un istante dietro un movimento impresso al vase che la contiene. Risultamenti analoghi ebbe più tardi il Fahrenheit coll'acqua distallata, che potè conservare liquida a parecchi gradi sotto 0°. Covrendola di uno strato di olio Gay-Lussac l'ebbe liquida a — 12°, e Deprestz potè raffreddarla senza congelazione fine a — 20°, chiudendola in tubi da termometro, specialmente se per ebollizione erano privati di aria prima di esser chiusi. L'acqua limacciosa o

che abbia sospesa qualunque altra sostanza; gela costantemente a 0° secondo le sperienze di Blagden, il quale ha trovato in questo fatto la ragione, per cui l'acqua limpida acquista per l'ebollizione una maggiore facilità a congelarsi: ciò provviene dalle sostanze calcari, che precipitate mediante l'evaporazione, restano sospese nel liquido, in cui prima erano disciolte. Ed in generale le sostanze acide, saline ed alcaline disciolte nell'acqua, fanno abbassare il grado di congelazione: così l'acqua satura d'idroclorato di calce si ha liquida a — 40°C.

Quando l'acqua è tuttavia liquida nelle temperature inferiori a 0°, basta imprimere al recipiente un moto specialmente di vibrazione, o gettarvi un pezzetto di ghiaccio, perchè tutta la massa si congeli all'istante. Un termometro, che vi sia stato anticipatamente immerso, salirà a 0°; ed in questo fatto i fisici hanno creduto trovare novella pruova dell'esistenza di un calore latente, senza por mente che se l'acqua nel ghiacciare svolgesse i 79°gradi di calore assorbito nel divenire liquida, la congelazione simultanea di tutta la massa sarebbe impossibile; poichè per ogni molecola di essa dovrebbè passare gran parte del calore fatto libero dalle molecole contigue, ed il maggior numero di esse avrebbe in conseguenza una quantità di calore più che sufficiente a conservarle nello stato di fluidità. Tutto quello che può dedursi da questo sperimento, e da altri eseguiti su diversi metalli fatti rapidamente solidificare colla loro immersione nell'acqua, si è che i corpi nel passsare dallo stato liquido al solido svolgono una certa quantità di calore. Quindi avviene che negl'inverni rigidi il freddo è alquanto mitigato allorchè nevica, e viceversa diventa più intenso, quando la neve è in liquefazione.

L'acqua ed altri corpi nello stato di fusione, come il ferro, il bismuto, ec. aumentano di volume nel passare allo stato solido. La precisione, con cui il ferro fuso riproduce le forme in cui fu versato, dipende dall'aumento di volume che il metallo ha ricevuto nel solidificarsi; e per la stessa ragione il bismuto nel congelarsi rompe il tubo di vetro, in cui è stato fuso. Il galleggiare del ghiaccio sull'acqua dichiara similmente l'espansione avvenuta

nel passare da liquido a solido: Negli sperimenti fatti dagli accademici del Cimento l'acqua ghiacciando ha rotto dei recipienti di doppio cristallo, di bronzo, di rame ec; e per una sfera cava di quest'ultimo metallo la forza espansiva nel ghiaccio è stata, secondo un calcolo istituito da Musschenbroeck, pari a 27720 libbre. Il maggiore Williams, trovandosi a Quebec durante un inverno rigidissimo, empì di acqua una bomba di un piede di diametro, e dopo averla chiusa con turacciuolo di legno fattovi entrare a colpi di martello, l'espose all'aria, la cui temperatura era —28°: indi a poco si udì una violenta esplosione, per la quale uscì dalla bomba una protuberanza di ghiaccio lunga 8 pollici, ed il turacciuolo di legno si rinvenne lanciato ad una distanza di oltre a 400 piedi.

83. *Liquefazione dei vapori* — Un corpo può tornare dallo stato di vapore a liquido, sia per aumento di pressione, sia per sottrazione di calore, sia infine per una combinazione di queste due azioni. Si prenda un tubo di cristallo chiuso in un estremo, e della lunghezza di oltre a 30 pollici; si empia di mercurio, meno poche linee che si finiranno di empire con un liquido volatile, coll'etere per esempio. Chiusa l'estremità libera, si capovolga il tubo in un bagno di mercurio a sufficienza profondo. Allora l'etere attesa la sua leggerezza si recherà in alto, parte riducendosi in vapore, e parte galleggiando sulla colonna di mercurio che la pressione dell'aria terrà elevata nel tubo superiormente al livello del bagno. Or se il tubo si profondi di più, lo spazio occupato dal vapore verrà a ristringersi, e si vedrà aumentare la spessezza dello strato di etere, e viceversa avviene, quando il tubo si elevi senza che l'estremità inferiore lasci di pescare nel mercurio del bagno. E se lasciando fermo il tubo, si bagni la sua estremità superiore una volta con acqua fredda, ed un'altra con acqua calda, si vedrà nel primo caso il mercurio salire e la doppiezza dello strato di etere divenire maggiore, nel secondo caso poi questa doppiezza sarà minore fino a scomparire talvolta interamente, ed il mercurio discenderà di molto.

Se nell'atto della gassificazione di un liquido vi è perdita di

calore, se ne svolge viceversa nella liquefazione del vapore. Si prenda una cassa cilindrica di rame nella quale giri un serpentino dello stesso metallo: si empia la cassa di acqua, ed al serpentino si aggiusti il collo di una storta contenente lo stesso liquido e che l'azione di un fornello sottoposto mantiene in dolce ebollizione. Il vapore che si produce, percorre il serpentino, ivi si addensa comunicando calore all'acqua della cassa per mezzo delle pareti del tubo. Bisogna aver precedentemente pesato la cassa col serpentino, l'acqua in essa versata, e quella introdotta nella storta; il peso di quest'ultima acqua, dopo terminato l'esperimento, farà conoscere la quantità di vapore liquefatto nel serpentino. Chiamiamo M la somma del peso dell'acqua contenuta nella cassa e dell'apparecchio metallico, dopo aver ridotto quest'ultimo in ragione della capacità termica del rame; m la massa del vapore liquefatto, t la temperatura dell'acqua prima d'introdurre il vapore, T quella con cui il vapore è entrato nel serpentino, e θ la temperatura dell'acqua nella cassa dopo terminato l'esperimento. Sarà dunque il calore ceduto dal vapore $m\ (\mathrm{T} - \theta)$, ed $\mathrm{M}\ (\theta - t)$ quello acquistato dalla cassa coll'acqua; e senz'altra sorgente di calore che quella derivante da una temperatura più elevata, dovrebb'esser la prima quantità almeno prossimamente eguale alla seconda. Al contrario il fatto dimostra essere il secondo numero di molto superiore al primo; dunque vi è stata produzione di forza calorifera in conseguenza della liquefazione del vapore. Chiamiamo x la quantità di gradi, di cui questo calore prodotto eleverebbe l'unità di massa dell'acqua, avremo che mx sarà il calore totale svolto dal peso m di vapore liquefatto: quindi l'equazione

$$\mathrm{M}\ (\theta - t) = m\ (\mathrm{T} - \theta) + mx.$$

Prendendo una media dei valori alquanto differenti ottenuti da parecchi fisici si ha $x = 550°$; vale a dire che la quantità di calore prodotto dalla liquefazione di un dato peso di vapore acqueo sarebbe sufficiente di elevare da 0° a 100° un peso di acqua 5 volte e mezzo più grande.

84. Sotto l'azione della pressione e del raffreddamento i corpi

aeriformi si comportano in due modi differenti. Per taluni di essi basta aumentare un poco la pressione, o diminuirne alquanto la temperatura, perchè in parte almeno passino allo stato liquido; altri poi resistono, e talvolta invincibilmente, alle più forti pressioni ed alle temperature più basse. Questa differenza di effetti fece distinguere i fluidi aeriformi in due grandi classi, l'una dei *vapori*, l'altra dei *gas permanenti*. Ma mentre da un dato sperimentale si traeva questa distinzione, parecchi fisici considerando la perfetta analogia di tutti i fluidi aeriformi rispetto all'insieme delle loro proprietà fisiche, sostenevano che se i gas permanenti non si riducevano allo stato liquido, ciò dipendeva dal non essere stati ancora abbastanza compressi e raffreddati. Seguendo questa veduta il Baccelli a Bologna nel 1812 ottenne per la prima volta un gas permanente liquefatto; e questo fu il gas ammoniacale. Più tardi H. Davy e Faraday ebbero la liquefazione del cloro e di altri gas. Queste sperienze furono poi ripetute ed estese da altri fisici: Bussy ottenne mediante un miscuglio frigorifero l'acido solforoso liquido, e Thilorier ebbe in gran quantità l'acido carbonico liquido e quindi solido. Allorchè da quest'acido liquido, contenuto in un forte recipiente, si lascia sfuggire a poco a poco il vapore che n'emana, sulla massa residua raffreddata dall'evaporazione si formano filamenti simili al cotone e di una bianchezza abbagliante. Questi filamenti, che costituiscono l'acido carbonico solido, esposti all'aria non si liquefanno, ma si disperdono gradatamente riducendosi in vapore.

È tale il raffreddamento prodotto dall'evaporazione dell'acido carbonico, che Thilorier dirigendo una corrente di questo vapore sul bulbo di un termometro ad alcool, lo vide discendere fino a — 90°. Intanto un freddo così intenso non congelava che piccola quantità di mercurio, e ciò provveniva dall'imperfetta conducibilità e dalla piccola capacità termica che questo fluido aeriforme ha comune cogli altri gas. Egli ebbe la felice idea di aggiungere l'etere a questo liquido, e dalla loro unione risultò una specie di sulliquido, che mentre produce sui corpi un contatto più esteso, raffredda colla celerità propria dei liquidi, e si

conserva più lungamente. Con questo corpo semiliquido Thilorier ottenne congelati oltre a 50 grammi di mercurio in pochi secondi: altri fisici lo usarono come mezzo di condensazione dei gas; ed accelerandone l'evaporazione per mezzo della macchina pneumatica Faraday ha ottenuto la seguente serie di rapporti tra i gradi di raffreddamento prodotto, e la pressione cui la massa vaporizzante veniva esposta sotto la campana pneumatica.

Temp.	pressione	Temp.	Pressione	Temp.	Pressione
— 77	721mm	— 87	188mm	— 99	61mm
— 80	493	— 91	137	—107	35
— 85	239	— 95	86	—110	50

Alla temperatura di — 110 l'alcool, l'olio di trementina, ec. divenivano densi come l'olio di oliva freddo.

Aggiungendo a così intenso raffreddamento l'azione di un'aumentata pressione sui gas sottoposti all'esperimento, molti di essi restarono liquefatti ed anche solidificati.

Dalle ricerche finora eseguite sul condensamento dei gas risulta che la loro trasformazione in liquidi richiede una pressione tanto più forte, per quanto n'è più elevata la temperatura; così l'acido carbonico che alla temperatura di 10° dev'essere sottoposto ad una pressione di 45 atmosfere per essere liquefatto, non ha bisogno che poco più di un'atmosfera per divenire liquido a 79° circa sotto 0°. Questa relazione che Faraday ha studiato su parecchi gas da — 87°,2 a + 4°,4, ci dimostra non esistere altra differenza tra i vapori ed i gas permanenti, se non che i primi possono tra le ordinarie vicende della pressione e temperatura atmosferiche saturare compiutamente un dato spazio, mentre i secondi nol possono che sotto enormi pressioni, ovvero ad un grado di raffreddamento che giammai si produce alla superficie della terra sotto l'ordinaria azione delle cagioni fisiche. Immaginiamo, per esempio, un tubo di vetro pieno di vapore acqueo a 20 gradi di calore: or se questo tubo venisse riscaldato a 100°, e che poi la sua temperatura si facesse discendere 80°, a 70°,

ec. senza giammai arrivare a 20°, il vapore allora si comporterebbe come un gas permanente, e per liquefarlo a 100° vi bisognerebbe una pressione moltiplice di quella che può tollerare a a 20°. L'effetto che le alte temperature producono sul vapore nelle condizioni da noi supposte, si riproduce sui gas permanenti a temperature inferiori a 0°; ed in conseguenza i gas non differiscono dai vapori che pel diverso grado della scala termometrica, donde comincia la possibilità di saturare un dato spazio sotto una data pressione.

CAPO SESTO.

Costruzione dei principali termometri.

85. *Termometro a mercurio* — È d'uopo cominciare dallo scegliere un tubo capillare di esatto calibro, vale a dire che abbia una sezione costante in tutta la sua lunghezza. Potremo di ciò assicurarci, introducendo nel tubo una piccola colonna di mercurio, e facendola scorrere di tratto in tratto misurare ad ogni fermata la sua lunghezza: se questa si troverà dapertutto costante, tale sarà ancora la sezione del tubo. Ma se questa condizione non avesse luogo, purtuttavia si potrebbe dividere il tubo in parti di eguale capacità; a tal uopo si farà scorrere la piccola colonna di mercurio in modo che nel passare da una posizione alla seguente lasci in mezzo un piccolo intervallo (*fig.* 86); la metà di questo intervallo sarà aggiunto a ciascuna delle due lunghezze che la colonna di mercurio avrà segnato in due posizioni consecutive, e si avranno due parti di eguali capacità. Così continuando si avrà il tubo diviso in molte parti eguali, che si potranno poi suddividere in parti minori ricominciando l'operazione con una colonna mercuriale più corta.

Scelto il tubo e soffiata ad un estremo una pallina più o meno grande secondo l'estensione che si vorrà dare ad ogni grado [1], si

[1] Sappiamo che $\frac{1}{6480}$ è il coefficiente della dilatazione apparente del mercurio nel vetro; ed in conseguenza ogni grado occuperà nel cannello

passerà ad empirlo di mercurio. A tal fine si fermerà all'estremità superiore del tubo un imbuto di carta e vi si verserà una sufficiente quantità di mercurio; indi si riscalderà la pallina coll'azione di una fiamma, la quale espellendo gran parte dell'aria

una capacità eguale a $\frac{1}{6480}$ di quella della pallina, trascurando la piccola porzione di tubo compresa tra la pallina e lo zero della scala. Ciò posto, cerchiamo quale debba essere il raggio della pallina da doversi soffiare all'estremità di un dato tubo, affinchè ogni grado occupi un certo numero m di millimetri. A tal fine peseremo dapprima il tubo vôto; indi fattavi entrare una certa quantità di mercurio coll'aspirare ad uno degli estremi, lo peseremo dinuovo: la differenza dei due pesi indicherà quello del mercurio introdotto. Chiamiamo p questo peso, ed n il numero di millimetri che occupa la lunghezza della colonna di mercurio; è chiaro che in m millimetri si conterrà un peso di mercurio dato da $\frac{pm}{n}$. Se questo peso fosse di acqua distillata a 4°,1 di temperatura, esso rappresenterebbe un volume riferito al centimetro cubico preso per unità. Ma poichè il mercurio ha una densità più grande, il suo volume dev'essere di altrettanto minore; quindi chiamando D la densità del mercurio, il suo volume che occupa m millimetri sulla lunghezza del tubo sarà $\frac{pm}{Dn}$ rispetto al centimetrico cubico, e $\frac{1000pm}{nD}$ prendendo ad unità il millimetro cubico. D'altronde chiamiamo x il raggio della pallina, la sua capacità sarà $\frac{4}{3}\pi x^3$; quindi perchè ogni grado della scala occupi m millimetri, è d'uopo che abbia luogo l'equazione

$$\frac{1000pm}{nD} = \frac{1}{6480} \cdot \frac{4}{3}\pi x^3$$

dalla quale si avrà x in millimetri.

Se poi al tubo termometrico si volesse adattare un serbatoio cilindrico, di cui fosse noto il raggio r, allora l'altezza x di esso sarebbe data dall'equazione

$$\frac{1000pm}{nD} = \frac{1}{6480} \cdot \pi r^2 x.$$

Altre volte forse bisognerà risolvere il problema inverso del precedente, vale a dire che il bulbo termometrico essendo già formato, si vuol sapere la lunghezza che avrà ogni grado. Allora si peserà l'apparecchio vôto, indi dopo aver piena la pallina di mercurio, ed una terza volta dopo aver aggiunto nuovo mercurio in modo che ne resti piena buona porzione del tubo, la quale verrà misurata in lunghezza. Chiamiamo P la differenza tra la prima e seconda pesata, p quella della seconda alla terza, ed n la lunghezza

interna, farà che la pressione atmosferica esterna prevalendo spingerà nell'interno del tubo una porzione del mercurio: ripetendo più volte la stessa operazione, la pallina e gran parte del tubo ne resteranno piene. Resta poi a regolare la quantità di liquido in modo che non si riduca tutto nella pallina a 0°, o che trabocchi dal tubo al limite superiore di temperatura; e ciò si farà per mezzo d'immersioni nel ghiaccio pesto e nell'acqua a sufficienza calda. Finalmente fa d'uopo che l'aria e l'umidità siano espulse dal tubo mediante l'ebollizione del mercurio; e mentre questo liquido si contrae al cessare dell'ebollizione, bisognerà chiudere l'estremità libera del tubo con un colpo di fiamma.

In tal modo il termometro è preparato per ricevere la sua gradazione. Supponiamo in primo luogo che le dimensioni della capacità del tubo e della pallina e la quantità di mercurio siano tali che il termometro possa andare dalla fusione del ghiaccio all'acqua bollente. Per ottenere il primo limite s'immergerà l'apparecchio in un bicchiere pieno di ghiaccio pesto, in modo che ne sia coverta tutta la parte occupata dal mercurio; chè in contrario questo liquido che malamente conduce il calore, avrebbe una temperatura superiore a 0° nella parte sottratta dall'azione della neve, e quindi lo zero della scala avrebbe una posizione superiore alla vera. È d'uopo inoltre attendere che intorno al termometro non si accumuli molt'acqua di fusione, la quale aven-

della colonna di mercurio. Se in questa lunghezza si contiene il peso p di mercurio, un millimetro ne conterrà $\frac{p}{n}$, ed x millimetri ne conterranno $\frac{px}{n}$; quindi perchè gli x millimetri corrispondano ad un grado, dovrà aver luogo l'equazione

$$\frac{px}{n} = \frac{P}{6480}.$$

Questi calcoli avrebbero richiesto una correzione relativamente alla temperatura, in cui si fanno le pesate; ma poichè nella soluzione di questi problemi una mezzana approssimazione è più che sufficiente, così abbiamo creduto poter trascurare piccole correzioni che d'altronde avrebbero reso assai complicato il calcolo.

do una temperatura più elevata che quella del ghiaccio, determinerà una falsa posizione dello zero; converrà dunque decantare il bicchiere a misura ch'essa si accumula, e sostituirvi altro ghiaccio. Quando il mercurio sembrerà immobile, bisognerà segnare il punto corrispondente sul tubo, lasciandolo tuttavia immerso nella neve; dopo qualche tempo si tornerà ad osservare un'altra volta, per vedere se sia disceso di più; giacchè gli ultimi movimenti di contrazione sono lentissimi, attesa la debole sottrazione di calore che la neve può fare attraverso del vetro sotto una piccolissima differenza di temperatura. Soddisfatte tutte queste avvertenze, purtuttavia lo zero può essere segnato in un luogo diverso dal vero, se il costrutttore non sa guarentire il suo raggio visuale dall'errore di parallasse: la teoria a questo riguardo è semplicissima; attuarla poi è tanto meno facile, per quanto è maggiore la spessezza del tubo. Lo zero dev'essere segnato nella sezione che farebbe sul tubo un piano ad esso normale e tangente al punto culminante della colonna di mercurio.

Riguardo poi al limite superiore della scala termometrica, reggendo la stessa osservazione che abbiamo fatto quanto all'esatta determinazione dello zero, bisognerebbe avere un recipiente abbastanza profondo perchè tutta la colonna mercuriale restasse immersa nell'acqua bollente. Ma noi sappiamo che il grado di temperatura necessario all'ebollizione di un liquido, dipende dalla pressione a cui è sottoposto; e per ciò in un recipiente alquanto profondo gli strati inferiori saranno più caldi dei superiori. Supponiamo, per esempio, una profondità di $0^m,4$: essendo il mercurio più denso dell'acqua nella ragione di 13,598 a 1, una colonna di acqua alta $0^m,4$ sarà equivalente $0^m,0294$ di mercurio. Or un aumento nella pressione atmosferica misurato da $0^m,0294$ di mercurio, è capace di elevare di un grado la temperatura dell'acqua bollente; questa differenza di calore dunque avrebbe luogo tra la pallina e la sommità della colonna termometrica. Ma se in vece dell'acqua adoperiamo il vapore ch'essa emette nello stato di ebollizione, potremo avere un'azione

estesa su tutta la colonna di mercurio senza che la pallina divenga più calda della sommità. A tal uopo serve il recipiente rappresentato dalla *fig.* 80. Dopo avervi versato un poco di acqua, con un pezzo di sughero si fermerà il termometro all'estremità superiore del vase in modo che la pallina sia appena distante dal livello del liquido: questo si porterà all'ebollizione sottoponendovi una lucerna a spirito di vino; e quando sotto l'azione prolungata del vapore il mercurio cesserà di elevarsi nel tubo termometrico, quel punto sarà il 100° della scala.

Tra i fisici si è agitata la quistione, se il vapore abbia precisamente o pur no la temperatura dell'acqua bollente da cui esala. Una tal quistione non riguarda punto la costruzione del termometro, poichè nel segnare il limite superiore della scala non si cerca un valore termico definito da tale o tal'altra quantità di calore: sia essa qualunque, purchè si possa riprodurre costantemente la stessa. E questa condizione sarà soddisfatta, usando l'apparecchio sopra descritto con acqua distillata che bolle sotto una pressione costante.

Le avvertenze finora esposte suppongono nell'atmosfera una pressione costante, mentre l'osservazione dichiara ch'essa non di rado varia, e talvolta di una quantità considerevole da un momento all'altro. Non essendovi dunque nella pressione atmosferica un valore naturalmente costante, faceva d'uopo fissarne uno di convenzione, e tale si è riguadata l'altezza $0^m,760$ che sotto la temperatura 0° suole avere il barometro a livello del mare; quindi se al momento di stabilire il limite superiore della scala termometrica il barometro segnasse un'altezza diversa da $0^m,760$, bisognerebbe fare una correzione al punto di ebollizione dato dall'esperimento. Or secondo le ricerche di F. J. H. Wollaston una differenza di $0^m,0275$ nella pressione dell'aria apporta quella di un grado centesimale nella temperatura dell'acqua bollente. Su questo dato è stata calcolata la tavola seguente, nella quale le quantità da doversi togliere o aggiungere al dato dell'esperimento, sono frazioni della distanza che sul cannello separa il punto di ebollizione dallo zero. Supponiamo, per esempio, che

al momento dell'esperienza l'altezza barometrica sia tale che ridotta col calcolo alla temperatura 0°, si trovi essere 0m,7415. A questa pressione corrisponde nella tavola + 0,007 della distanza che passa tra 0° ed il punto a cui si è innalzato il mercurio per l'azione dell'acqua bollente: allora con una *macchina a dividere* sarà facile determinare questa porzione di lunghezza da doversi aggiungere al punto dato dal vapore dell'acqua bollente per ottenere quello che avremmo avuto sotto la pressione 0m,760.

Altezze barometriche ridotte a 0°.	Correzioni	Altezze barometriche ridotte a 0°.	Correzioni	Altezze barometriche ridotte a 0°.	Correzioni
m		m		m	
0,7875 . .	— 0,010	0.7573 . .	+ 0,001	0,7312 . .	+ 0,011
0,7847 . .	— 0,009	0,7546 . .	+ 0,002	0,7286 . .	+ 0,012
0,7819 . .	— 0,008	0,7520 . .	+ 0,003	0,7261 . .	+ 0,013
0,7791 . .	— 0,007	0,7493 . .	+ 0,004	0,7235 . .	+ 0,014
0,7764 . .	— 0,006	0,7467 . .	+ 0,005	0,7210 . .	+ 0,015
0,7736 . .	— 0,005	0,7441 . .	+ 0,006	0,7185 . .	+ 0,016
0,7709 . .	— 0,004	0,7415 . .	+ 0,007	0,7160 . .	+ 0,017
0,7681 . .	— 0,003	0,7389 . .	+ 0,008	0,7136 . .	+ 0,018
0,7654 . .	— 0,002	0,7363 . .	+ 0,009	0,7111 . .	+ 0,019
0,7627 . .	— 0,001	0,7337 . .	+ 0,010	0,7086 . .	+ 0,020
0,7600 . .	0,000				

Rispetto al punto di ebollizione vi sarebbe ancora un'altra correzione a farsi, e questa riguarderebbe la latitudine del luogo in cui si costruisce il termometro. Se la gravità è funzione della distanza del punto di osservazione dall'equatore, l'altezza barometrica 0m,760 rappresenterà una pressione variabile secondo la latitudine del luogo. Per valutare l'importanza di questa correzione osserviamo che a livello del mare la gravità ai poli essendo a quella sotto l'equatore come 1,0052: 1 [1], l' altezza ba-

[1] Dalle più accurate ricerche fatte sulla lunghezza del pendolo che batte i secondi a diverse latitudini, si è dedotto che questa lunghezza all'equatore è 991mm, 027015 ed al polo è 996mm,188963. Or la formola $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ dichiarando essere la forza di gravità proporzionale a queste lunghezze, la divisione del 2° numero pel 1° ci dà il rapporto 1,0032.

rometrica 0m,760 nella regione polare sarà equivalente a 0m,764 sotto l'equatore. Or consultando la tavola precedente si trova che per una simile differenza la temperatura del punto di ebollizione non varierà di 0,2 di grado; e per ciò l'influenza della latitudine è pressochè nulla.

Non ostante la massima attenzione usata nel determinare il punto 0° sulla scala termometrica, ordinariamente avviene che tornando qualche mese dopo la costruzione di un termometro, ad immeggerlo nel ghiaccio pesto, il mercurio si ferma un pò più alto che non è il segno dello zero; la capacità della pallina è dunque diminuita. Il canonico Bellani è stato il primo ad osservare questo fatto, ed assegnarne la cagione, se non unica, almeno la più influente. Pel fatto delle *lagrime batave* e per altri consimili è noto che il vetro nel passare dalle alte alle basse temperature non può prendere l'equilibrio molecolare corrispondente all'energia della sua forza di aggregazione, se non disperde il suo calore per mezzo di un lentissimo raffreddamento. Or questa sostanza nella costruzione di un termometro soffre dapprima l'alta temperatura necessaria a poterne soffiare la pallina, indi quella dell'ebollizione del mercurio per espellere l'aria e l'umidità dall'apparecchio, ed infine è sottoposta al vapore dell'acqua bollente per ottenere il limite superiore della scala. Dopo ognuna di queste elevate temperature si lascia poi raffreddare liberamente nell'aria, e quindi con una grande celerità. Perciò quando le molecole componenti la superficie della pallina hanno già preso la temperatura dell'aria ambiente, le interne saranno tuttavia più calde, ed occupando in conseguenza un volume più grande di quello che corrisponderebbe alla temperatura del mezzo ambiente costringono tanto le molecole della faccia esterna della pallina che quella della faccia interna a restare in uno stato di espansione forzata; la quale dietro l'azione continuata dall'attrazione molecolare andrà poi gradatamente diminuendo, fino a ridurre la capacità della pallina al suo stato normale. Per assicurarsi della realtà di questa spiegazione il Bellani soffiò una palla di vetro, la empì esattamente di mercurio, la chiuse coll'a-

zione della fiamma, e quindi la pesò nell'acqua: dopo un anno la ripesò nello stesso liquido, e rinvenne un peso maggiore; la qual cosa, come vedremo nell'*Idrostatica*, dimostra chiaramente essere avvenuta una diminuzione nel volume della palla. Più tardi Flaugergues in Francia si occupò dello stesso fatto, e volle attribuirne la cagione alla pressione esterna dell'atmosfera sui bulbi dei termometri purgati di aria; ma questa spiegazione non regge, poichè si sono espressamente costruiti dei termometri, nei quali si è lasciato aperto il cannello, ed intanto vi si è osservato l'innalzamento dello zero.

Quando la lunghezza del tubo lo concede, i costruttori prendendo parti eguali all'estensione di un grado continuano la scala termometrica superiormente a 100°, ed al di sotto di 0°. Al di là di 100° la scala ha per limite 360° che segna la temperatura di ebollizione del mercurio ; sotto 0° poi la gradazione non può procedere oltre il 40°, poichè questo grado di freddo congela il mercurio. Del resto questi gradi, segnati oltre i limiti dei due punti fissi di calore, non essendo definiti da verun fatto termico costante, debbono riguardarsi come arbitrarî, tanto più che le diverse specie di vetro hanno una varia legge di dilatazione; e perciò dall'osservare che due termometri vanno di accordo tra 0° e 100 non possiamo dedurre che essi si accorderanno tra 100° e 200°, tra 200° e 300°. Regnault desumendo la temperatura di una massa di aria dal grado della sua tensione, ha trovato in tre termometri delle seguenti specie di vetro le indicazioni quì appresso segnate.

I Tubo di vetro ordinario soffiato in palla.	II Piccolo palloncino di vetro ordinario.	III Tubo di cristallo soffiatto in palla.	Differenze tra I° e III°.
0°	0°	0°	0
100	100	100	0
190,51	190,84	191,66	1°,15
246,68	247,02	249,36	2,68
251.87	252,06	254,57	2,70
279,08	279,31	282,50	3,42
310,69	311,14	315,28	4 .59
333,72	333,76	340,07	6,35

Se in vece di dare al termometro la scala centigrada, si volesse quella di Réaumur o quella di Fahreinheit, allora quanto alla prima si dividerebbe in 80 parti eguali lo spazio compreso tra i punti di fusione ed ebollizione, e rispetto alla seconda lo stesso spazio sarebbe diviso in 180 parti eguali, segnando però 212 all'acqua bollente e 32 alla fusione del ghiaccio, poichè sappiamo che lo zero della scala Fahreinheit si trova di 32 divisioni sotto a quello degli altri termometri. In conseguenza è facile tradurre le indicazioni date da uno di questi termometri in quelle che si sarebbero ottenute dagli altri due; avvertendo però di sottrarre 32 dai numeri del termometro Fahreinheit prima di compararlo al centigrado o a quello di Réaumur. A tal uopo osserviamo che dovendo una stessa energia termica elevare il mercurio in ciascuno di questi termometri ad un'altezza in gradi proporzionale alla quantità di parti che il tubo comprende tra gli estremi fissi dalla scala, si avranno come basi di comparazione fra i tre termometri le seguenti equazioni.

$$1°\text{C.} = \frac{4}{5}\text{R.} = \frac{9}{5}\text{F.}$$

$$1°\text{R.} = \frac{5}{4}\text{C.} = \frac{9}{4}\text{F.}$$

$$1°\text{F.} = \frac{5}{9}\text{C.} = \frac{4}{9}\text{R.}$$

Supponiamo, per esempio, che si voglia sapere a quanti centigradi corrispondano 87° F. Poichè dai gradi F. bisogna togliere 32 per renderli comparabili a quelli degli altri due termometri, così avremo $87 - 32 = 55$; i quali moltiplicati per $\frac{5}{9}$ ci danno il prodotto $30 \frac{5}{9}$ che rappresenterà la quantità di gradi centesimali equivalenti a 87° F.

86. *Termometro ad alcool*. Il mercurio, come liquido termometrico, unisce al vantaggio di essere opaco, che lo rende visibile in un tubo esilissimo, quello di avere una piccolissima capacità termica ed una conduttività forse superiore a quella di ogni altro liquido; per le quali proprietà il termometro a mercurio mentre acquista celeramente la temperatura del corpo cui viene a contatto, non sottrae ad esso che una piccola quantità di calore. A ciò si aggiunga che tra i liquidi il mercurio può percorrere la più estesa scala di calore senza mutazione di stato ed in vero gelando a — 40° e bollendo a 360°, esso conserva lo stato liquido per un intervallo di 400° gradi; mentre l'alcool non ne percorre che 189, poichè bolle a 79° ed a — 110 diviene viscoso come l'olio gelato. Ma questa proprietà, che ha l'alcool, di poter discendere ad un enorme raffreddamento senza congelarsi, lo rende idoneo a disegnare le temperature che molto discendono sotto allo zero, e che non potrebbero essere indicate dalle contrazioni del mercurio già solidificato.

Facile è la costruzione del termometro ad alcool. Dopo avèr preparata la pallina all'estremità di un tubo a sufficienza calibro, la riscalderemo sulla fiamma di una lucerna a spirito di vino, affinchè rarefatta di molto l'aria interna, la pressione esterna dell'atmosfera valga a spingere dentro la pallina l'alcool, quando immergeremo l'estremità libera del tubo in un recipiente già pieno di questo liquido. Chiusa l'estremità superioriore del tubo, dopo averlo privato di aria coll'ebollizione dell'alcool, passeremo a determinare lo zero della scala, immergendo il termometro nel ghiaccio pesto con quelle avvertenze che sopra abbiamo esposto. In riguardo poi all'altro limite della scala, quantunque (sup-

ponendo il tubo abbastanza resistente) si potesse ottenere immediatamente coll'immersione del termometro nel vapore dell'acqua bollente, purtuttavia è meglio ottenere i gradi superiori a 0° comparando l'andamento di questo termometro a quello di un termometro campione a mercurio, poichè in tal modo esso diviene comparabile a quest' ultimo [1] per quella cinquantina di gradi circa, per cui suole stendersi la sua scala superiormente a 0°. Per menare ad effetto questa graduazione comparata, si verserà dell'acqua calda a circa 60° in un ampio recipiente e profondo abbastanza, perchè immergendovi i due termometri ne restino sommerse le colonne liquide in essi contenute. La grandezza della massa di acqua assicura tale lentezza di raffreddamento, che quando il termometro campione toccherà il grado 50° avremo tempo da segnare il luogo ove sarà pervenuta la colonna di alcool nell'altro termometro. Similmente, attendendo gl'instanti in cui saranno dal campione indicati 45°,40°,35, ec. segneremo sul termometro ad alcool degl'intervalli di 5 in 5 gradi, ciascuno dei quali poi essendo suddiviso in 5 parti eguali, avremo compiuta la richiesta graduazione. Questo metodo di raffreddamento, proposto per la prima volta dal Prof. Ab. Zantedeschi, assicura il costruttore dell'eguale temperatura dei due termometri comparati, mentre il metodo della temperatura crescente suppone, contra ogni probabilità, che i due apparecchi avessero la stessa celerità di riscaldamento.

87. *Termometri metallici.* Sotto questo nome descriveremo gli apparecchi termometrici di Borda, Bréguet e Holzmanns.

Pel grande lavoro geodetico che sul terminare dello scorso secolo fu eseguito in Francia per misurare l'arco di meridiano compreso tra Dunkerque e Perpignano, Borda propose per riga metrica una verga parallelepipeda di platino lunga 12 piedi, e

[1] Dalle sperienze di Deluc, registrate a pag. 143, si rileva che due termometri l'uno a mercurio e l'altro ad alcool, graduati coll'immersione nel ghiaccio pesto e nell'acqua bollente, vanno sì poco di accordo nei gradi intermedi che mentre il termometro a mercurio segna 55°, quello ad alcool non dà che 50°,7.

sulla quale ne stava adagiata un'altra di rame meno lunga. Le due verghe fermate in un estremo con vite, (*fig.* 87) furono successivamente immerse in un bagno di neve pesta, e poi in quello di acqua bollente, segnando ad ogni volta sulla verga di platino il luogo ove si trovava l'estremità libera di quella di rame. Lo spazio compreso tra le due posizioni fu diviso in 100 parti eguali distinte da esilissimi tratti resi visibili da una lente d'ingrandimento. Così il sistema delle due verghe componeva un termometro, sul quale bastava leggere la divisione, cui corrispondeva l'estremità libera del rame per conoscere la temperatura della riga sottoposta; dato di somma importanza nella misura di una base geodetica, come quello che permette di ridurre per mezzo di calcolo la lunghezza della riga metrica al valore che avrebbe avuto sotto una certa temperatura costante.

I fratelli Bréguet, resi celebri per la perfezione dei loro cronometri, hanno costruito un sensibilissimo termometro (*fig.* 90) con tre lamine di platino, oro ed argento, sovrapposte le une alle altre, e ridotte col laminatoio a formare un solo nastro metallico di una doppiezza non eccedente $\frac{1}{50}$ di millimetro. Questa lamina, girata ad elica in modo che l'argento faccia l'interno della spira ed il platino la circoscriva all'esterno, è poi fermata con un capo ad un sostegno, portando nell'altro un indice leggiero che può scorrere sulla circonferenza di un cerchio diviso in 100 parti eguali. Quando la temperatura del nastro aumenta, le sue spire si allargano poichè l'argento è più dilatabile del platino; e viceversa si ristringono, allorchè la temperatura diminuisce. La lunghezza del nastro e le dimensioni delle spire vogliono essere regolate in modo che l'indice percorra l'intera circonferenza del cerchio nel progredire della temperatura da 0° a 100°. A rigore il nastro potrebbe essere composto soltanto di argento e platino, ma la grande differenza che presentano i coefficienti di dilatazione di questi due metalli, potrebbe sotto i rapidi cangiamenti di temperatura produrvi una lacerazione che renderebbe inserviente la spira: a ciò si oppone l'interposta laminetta di oro,

che ha una dilatazione pressocchè media tra quella del platino e dell'argento.

L'alto grado di conducibilità dei metalli componenti la spira, la sua piccola massa e l'estesa superficie ch'essa presenta al contatto del mezzo ambiente rendono ragione della prontezza di questo termometro nel rilevare i più piccoli e fugaci cangiamenti di temperatura. I fratelli Bréguet posero il loro apparecchio a spira insieme ad un termometro a mercurio sotto una campana pneumatica della capacità di circa 5 litri ed alla temperatura di 19°C. Essi fecero rapidamente il vòto: il termometro metallico discese a — 4°C., e quello a mercurio si abbassò di soli 2 gradi. Lasciarono rientrare l'aria, e quando il mercurio tuttavia discendeva, il termometro metallico era già salito a 50°.

Sulla stessa proprietà delle lamine compensatrici Holzmanns ha costruito un termometro a forma di un oriuolo tascabile, e perciò denominato *termometro a quadrante*. Il pezzo principale è una duplice lamina di platino e rame, o di ferro e rame, fermata in *a* (*fig.* 89), curvata in *b* e libera in *c*. Con questo estremo essa fa una pressione continua sul braccio corto di una leva mobile intorno all'asse *s*, il cui braccio lungo mediante l'arco dentato *nn'* ingrana con un piccolo rocchetto che porta l'indice *li*; ed al rocchetto è fermato un capo della piccola molla *e*, la quale tiene l'estremità *c* della lamina compensatrice a continuo contatto col braccio corto della leva. Variando l'inflessione in *b* della lamina secondo i diversi cangiamenti nel grado di calore, è facile comprendere come l'indice possa muoversi in opposte direzioni, secondochè la temperatura aumenta o diminuisce.

88. *Pirometri* — Si dà oggi questo nome agli strumenti termometrici destinati a misurare le più alte temperature che l'arte sa produrre, come sarebbe quella per esempio dei fornelli di fusione. Dopo quello che ha costruito Wegdwood nel 1782 si ebbero i pirometri di Guyton Morveau, di Prinsep, di Daniell, ec; ma all'infuori del pirometro ad aria di Pouillet, che quì appresso descriveremo, nessuno degli altri pare che sia più soddisfacente di quello di Wegdwood.

La costruzione di quest'ultimo pirometro poggia sulla proprietà dell'argilla di contrarsi a misura che soffre una temperatura più elevata [1]. Wegdwood preparava dei cilindri di questa sostanza del diametro di 12 millimetri e lungi 14 o 15; e li metteva in un crogiuolo insieme al metallo, di cui voleva conoscore la temperatura di fusione. Appena questa avveniva, egli ritirava il cilindro di argilla, lo lasciava raffreddare, e poi ne misurava la contrazione nel seguente modo. Sopra una lamina di rame erano fermate due verghe dello stesso metallo, della lunghezza di 304 millimetri, e situate in modo da formare una specie di canaletto che aveva in un estremo 12 millimetri di lunghezza, ed 8 nell'altro. Per questa convergenza delle verghe avveniva che il cilindro di argilla poteva tanto più inoltrarsi nel canaletto, quanto era più grande la contrazione ricevuta, vale a dire quanto più alta era la temperatura cui era stato esposto. E per viemeglio stabilire questi confronti, una delle verghe era divisa in 240 parti eguali, ch'erano altrettanti gradi del pirometro. Una scala così arbitraria rende difficile la comparazione di questo strumento cogli ordinarî termometri; purtuttavia i fisici inglesi ammettono le seguenti relazioni.

[1] Questa proprietà dell'argilla, fino ad un certo grado di calore, può dipendere dall'evaporazione dell'acqua ch'essa contiene, poichè pesandola dopo averla esposta a temperature sempre crescenti si trova una diminuzione continua nel suo peso. Ma ad altissime temperature si osserva che la contrazione non lascia di progredire, quantunque il peso sia divenuto costante: allora i chimici dicono che la diminuzione di volume è prodotta da una combinazione più intima dell'allumina colla silice, che sono i componenti principali dell'argilla. Sia qualsivoglia la cagione del fenomeno, quel ch'è degno di considerazione rispetto all'uso termometrico di questa sostanza, si è che dopo averla sottoposta ad un'alta temperatura, a 1000° per esempio, e poi lasciata raffreddare, ogni altro riscaldamento inferiore a 1000°, invece di contrazione produrrà dilatazione crescente col grado di temperatura. Quindi i cilindri di argilla, che hanno servito una volta pel pirometro, non possono servire una seconda volta, se la temperatura non è più elevata della prima.

Wegdwood.	*Fahreinheit.*
2°	642°,75
3	705, 26
7	955, 28
22	1822, 67
27	2205, 18
32	2517, 63
95	6508, 89
130	8696, 24
155	9633, 68
160	10517, 12
175	11454, 56

89. Il *pirometro ad aria* di Pouillet è costruito sul principio della costante dilatazione dei corpi aeriformi per eguali addizioni di calore. Sotto la forma più semplice quale si richiede per farne unicamente comprendere l'andamento, esso è rappresentato dalla *fig.* 93. *a* è un serbatoio di platino; *bc* è un tubo di piccolissimo diametro, in parte dello stesso metallo e nel rimanente di argento; *t* è un tubo di cristallo, unito all'estremo *c* del primo, e diviso in parti di eguali capacità: a questo tubo n'è congiunto inferiormente un altro *s* dello stesso diametro interno. La capacità del serbatoio e di quella parte tubo *bc*, che insieme al primo deve sperimentare l'alta temperatura, di cui si vuole la misura in gradi, viene determinata col pesarlo prima vôto, e poi pieno di acqua o di mercurio; collo stesso modo è definita la capacità del rimanente tubo *bc*, e di ciascuna divisione del tubo *t*. Il serbatoio, il tubo *bc* e la parte superiore di *t* sono pieni di aria asciutta, che alla temperatura 0° tiene ad uno stesso livello nei tubi *t* ed *s* il mercurio di cui sono in parte pieni; ed in tal modo l'aria chiusa nell'apparecchio si trova sotto una pressione eguale a quella dell'atmosfera. A misura poi che l'aria contenuta nel serbatoio si riscalda, e quindi si dilata, il mercurio scende in *t* e sale in *s*; e la pressione sarebbe allora aumentata della differenza dei due livelli: ma aprendo il robinetto *z*, il mercurio scorre, e si riduce bentosto alla stessa altezza nei due tubi. Allora si conterranno le divisioni che l'a-

ria occupa nel tubo t oltre quelle che occupava a 0°. Questo numero ridotto col calcolo a 0°, lo chiamiamo d, e siano c la capacità del serbatoio occupata dall'aria a 0°, a il coefficiente di dilatazione di questa ed m quello del platino. L'aumento d del volume dell'aria, ridotto col calcolo a 0°, aveva alla temperatura t, che si vuol conoscere, il valore $d(1+at)$; e questo numero rappresenta la differenza tra l'intero volume di aria dilatata $c(1+at)$, e la capacità $c(1+mt)$ del serbatoio di platino alla temperatura t. Laonde per determinare t si ha l'equazione

$$d(1+at) = c(1+at) - c(1+mt),$$

donde
$$t = \frac{d}{c(a-m)-ad}.$$

Con questo apparecchio Pouillet ha determinato i gradi di fusione del ferro, dell'oro, dell'argento, ec. che abbiamo indicato nella tavola a pag. 187; ed ha trovato le seguenti relazioni tra il colore del platino e la temperatura cui viene sottoposto.

Colori del platino.	*Temperature.*
Rosso nascente	523 [1]
Rosso oscuro	700
Ciliegia nascente	800
Ciliegia	900
Ciliegia chiaro	1000
Arancio cupo	1100
Arancio chiaro	1200
Bianco	1300
Bianco sudante	1400
Bianco abbagliante	1500

[1] Ricerche più recenti ed eseguite con diverso metodo dal prof. Draper assegnano il grado 526° alla temperatura che rende visibile in uno spazio privo di luce un corpo non fosforescente.

LIBRO QUARTO.

Applicazione delle teoriche esposte nei libri precedenti alle leggi di equilibrio e movimento dei fluidi, ed alla misura delle densità.

SEZIONE I.

EQUILIBRIO DEI FLUIDI.

CAPO PRIMO.

Equilibrio dei liquidi.

Superficie di livello — Principio di egual pressione — Pressioni sulle pareti dei recipienti — Vasi comunicanti — Equilibrio dei solidi immersi nei liquidi.

90. Carattere distintivo dello stato liquido dei corpi è la somma mobilità delle loro molecole, effetto della diminuzione che la forza ripulsiva del calore ha prodotto nell'intensità della coesione. Da questa prima idea sulla costituzione fisica dei liquidi emergono primieramente i due seguenti corollari.

— 1° La superficie libera di una massa liquida in quiete, denominata ancora *superficie di livello*, dev'essere in ogni suo elemento normale alla direzione della gravità. Ed in vero se poniamo la possibilità di una direzione obbliqua, allora l'azione della gravità sarà risultante di due forze, l'una normale alla superficie e distrutta dalla resistenza che vi trova, l'altra ad essa tangente e che solleciterà le molecole sulla superficie di livello,

come farebbe di una palla sopra un piano inclinato; lo stato di quiete sarebbe dunque impossibile. Questa relazione, che l'immagine di un pendolo riflessa dalla superficie del mercurio ci ha presentato come un fatto (nº 25), ora trova la ragione della sua esistenza nella natura stessa dello stato liquido dei corpi.

Or comparando questa condizione della superficie di livello dei liquidi alla convergenza della gravità verso il centro della terra, si trova la ragione della forma sferoidale della superficie del mare, e per la quale il navigante vede discendere a poco a poco sotto l'orizzonte il lido, donde è partito. Ma se i punti che scegliamo sulla massa liquida sono a tale distanza che le rispettive direzioni del filo a piombo si possono riguardare parallele, allora la curvatura della superficie di livello sarà insensibile, e come l'acqua stagnante essa ci sembrerà un perfetto piano.

— 2.º Se ad un punto qualunque di una massa liquida si faccia una pressione, questa dovrà necessariamente irradiarsi in tutta l'estensione della massa; poichè le sue molecole formando nella loro massima mobilità un sistema equilibrato tra le forze di gravità, coesione e ripulsione termica, ne segue che se l'equilibrio è turbato in una sola molecola, lo sarà necessariamente in tutto il sistema. A dimostrare la realtà di questo effetto nei liquidi serve il piccolo apparecchio rappresentato dalla *fig.* 94. Si compone di un cilindro che finisce in un globo vôto, a cui secondo la direzione dei raggi sono adattati diversi piccoli tubi; e nell'interno del cilindro si muove uno stantuffo. Si comincia dall'immergere l'apparecchio nell'acqua in modo che ne resti pieno il globo insieme ad una porzione del cilindro; indi si cava fuori, e si spinge lo stantuffo: allora l'acqua zampillando da tutti i tubetti dimostrerà che la pressione fatta secondo l'asse del cilindro si è diffusa nell'interno del globo.

Se questa sperienza dimostra che la pressione realmente si diffonde in tutta l'estensione di una massa liquida, non vale poi a dichiarare secondo qual ragione essa si trasmette; nè vi sarà mai congegno che possa direttamente mettere in evidenza que-

sta ragione incognita, poichè l'azione della gravità che dall'alto in basso si aggiunge alla pressione, mentre nelle altre direzioni più o meno la contrasta, rende sì complicato il fenomeno da non poterne dedurre veruna conseguenza. Intanto l'idraulico che da un sol punto di veduta voglia considerare l'insieme dei fenomeni idrostatici, non può far a meno di riconoscervi il principio di *egual pressione*, vale a dire che la pressione esercitata in un pollice quadrato, a modo di esempio, della superficie di un liquido, deve ripetersi inalterata in ogni pollice quadrato di una sezione qualunque fatta sulla sua massa. In questa ragione di eguaglianza starà il legame naturale che deve coordinare in un sistema scientifico tutti i fenomeni che si rapportano all'equilibrio dei liquidi, dopochè la realtà del principio sarà chiaramente dimostrata. Or gli scrittori d'Idrostatica, non ponendo mente all'origine ideologica del principio e sentendo daltronde la necessità di mostrarne l'esattezza, si trovano poi costretti a non poterlo dichiarare diversamente che immaginando sperimenti incapaci di esser menati ad effetto, perchè poggiati sull'astratto concetto di un liquido non sottoposto alla forza di gravità. A noi pare che il principio di egual pressione non possa trovare la sua dimostrazione in altro che nella realtà delle sue conseguenze: laonde supponendone l'esistenza, noi ci faremo ad indagare le leggi delle pressioni dei liquidi; e poi comparando i risultamenti teoretici ai fatti dell'esperienza, dal loro perfetto accordo otterremo la dimostrazione più convincente del principio stabilito.

91. Supponiamo tre recipienti A,B,C (*fig.* 99,100,101), i cui fondi siano piani ed orizzontali; e sia A un cilindro o prisma retto, B abbia l'apertura più larga del fondo, e viceversa sia per C. Ponendo che i tre vasi siano pieni di un liquido qualunque, cerchiamo secondo qual ragione saranno premuti i loro fondi.

Incominciando dal vase A, fingiamo che da tutti i punti della superficie di livello siano abbassate altrettante perpendicolari sul fondo. Posta la forma del vase, queste rette formeranno un sistema di parallele alla parete laterale che lo circoscrive;

e dando a ciascuna delle rette la spessezza di una molecola, esse rappresenteranno l'insieme delle colonne liquide elementari, in cui possiamo immaginare divisa l'intera massa. Ciascuna di queste colonne gravitando sul fondo, questo sopporterà la somma dei loro pesi, vale a dire il peso di tutta la massa liquida contenuta nel recipiente.

Passiamo ora al vase B, e da un punto *c* preso sul perimetro del fondo eleviamo una verticale *cm*; indi supponendo che la *cm* movendosi parallelamente a se stessa percorra l'intero contorno *cd* del fondo, avremo circoscritto nella massa una colonna liquida *cmnd*, la quale graviterà tutta sul fondo, non altrimenti che abbiamo veduto aver luogo nel vase A. Le masse contenute negli spazî laterali *dns*, *cmt* premeranno sulla colonna centrale; ma ogni pressione dovendo essere normale alla superficie che la riceve, quelle che la massa ambiente eserciterà sulla colonna *cmnd*, riusciranno parallele a *cd*, e quindi di nessun effetto sul fondo. Questo dunque riceverà una pressione eguale al peso di una colonna liquida, avente la sua superficie per base, o per altezza quella del liquido sovrastante.

Veniamo da ultimo al vase C. Per un punto qualunque *s* della parete *ab* immaginiamo condotta l'orizzontale *sv*, e per un punto *m* di questa sia elevata la verticale *mb* fino ad incontrare un punto *b* della superficie di livello. La colonnetta liquida *bm* farà in *m* una pressione proporzionale alla sua altezza. Questa pressione dovendo pel principio adottato diffondersi egualmente in tutte le direzioni, agirà eziandio secondo l'orizzontale *ms*, bastando la continuità del liquido a trasportarla fino al punto *s*. In questo punto, seguendo sempre il principio adottato, possiamo immaginare un altro centro, donde la pressione comunicata egualmente s'irradî, e tra le possibili direzioni scegliamo quella della verticale *sn*, per la quale la pressione sarà trasmessa in *n*. Questo punto del fondo sarà dunque premuto dal peso della colonnetta liquida *sn*, più dalla pressione che vi trasmette la *bm*; vale a dire ch'esso soffre il peso di una colonnetta liquida dell'altezza *zn*. Ripetendo la stessa costruzione per gli altri punti

delle pareti *ab* e *cd*, ed aggiungendo a queste pressioni quella della colonna centrale *bgec*, troveremo che il fondo *ad* soffrirà una pressione misurata dal peso di una colonna liquida che avesse *ad* per base e *zn* per altezza.

Dunque pel principio di egual pressione il peso da cui sarebbe gravato il fondo orizzontale del recipiente di un liquido, non dipenderebbe affatto dalla forma del vase, ma soltanto dall'estensione del fondo, dall'altezza e densità del liquido sovrastante.

Compariamo ora le conseguenze del principio adottato ai risultamenti dell'esperienza. A tal comparazione è destinato l'apparecchio rapppresentato dalla *fig.* 95 *ab* è un cilindro di ottone, il cui fondo mobile *c* vi è mantenuto aderente per mezzo del filo *cd*, che passando per le gole delle girelle *d* e *f*, termina col piattello *g* gravato di pesi. Il cilindro *ab* porta nell'orlo superiore poche spire di vite, per mezzo della quale vi si possono congiungere vasi di diverse forme, come A,B,C, ma tutti della stessa altezza. Fermato dapprima il vase A, empiamolo di acqua fino ad un certo livello *zv*, e regoliamo la quantità di peso nel piattello *g* in modo che basti versare poche altre goccie di acqua, perchè il fondo *c* discenda sotto una pressione divenuta preponderante. Allora al vase A si sostituiscano successivamente i vasi B e C, e si troverà che l'acqua pervenuta in essi all'altezza che aveva in A, farà del pari discendere il fondo mobile *c*.

Dunque la pressione che un liquido esercita sul fondo orizzontale di un recipiente è realmente eguale al peso di una colonna dello stesso liquido, avente la medesima altezza, e per base la superficie del fondo.

92. In forza dello stesso principio si può produrre un'enorme pressione con una piccola quantità di liquido. Prendiamo ad esempio un vase come viene rappresentato dalla *fig.* 96 : la pressione che il liquido, di cui sarà pieno, farà sul fondo *ac*, sarà eguale al peso di una colonna liquida che avesse la base *ac* e l'altezza *am*; vale a dire un peso corrispondente al volume *amnc*, ed in conseguenza molte volte più grande di quello del liquido con-

tenuto. I fisici, che da un lato non potevano opporre all'esattezza di questa illazione, e che dall'altro osservavano che messo il recipiente in una bilancia il peso era semplicemente aumentato da quello del liquido contenuto, denominarono il fatto *paradosso idrostatico*. Ma ogni contraddizione svanisce, quando si considera che mentre il liquido preme il fondo *ac* dall'alto in basso con una forza proporzionale al volume liquido *amnc*, nel tempo stesso spinge dal basso in alto le pareti *bo* ed *sd* con forze proporzionali ai volumi *bmto*, e *svnd*; e poichè le forze si contrastano mercè la continuità delle pareti (ciò che non ha luogo nell'esperimento che si fa coll'apparecchio rappresentato dalla *fig.* 95) così la loro differenza soltanto, ossia il peso del liquido contenuto nel recipiente, potrà agire sulla coppa della bilancia.

Che poi i liquidi realmente spingano in alto le pareti superiori dei recipienti, lo conferma il seguente sperimento. *ab*, e *ce* (*fig.* 98) sono due tondi di legno riuniti da una zona di cuoio a guisa di un mantice, nell'interno del quale penetra il tubo *d*. Supponiamo che *ab* abbia 0m,5 di diametro, ed il tubo *d* si elevi di 2 metri sul piano *ab;* in conseguenza quando l'apparecchio sarà pieno di acqua, il fondo *ab* riceverà una spinta in alto misurata dal peso di una colonna liquida alta 2 metri, ed avente per base un cerchio di 0m,5 di diametro. Or una colonna di acqua di queste dimensioni pesa chilogrammi 393,5 (equivalenti a rotoli napolitani 480); perciò caricando *ab* di un peso minore e sia di 350 chilogrammi, esso si eleverà per la spinta del liquido, come l'esperienza conferma.

Dopo questa pruova non recherà più meraviglia il vedere che una piccola quantità di acqua può colla sua pressione sfondare una botte. Per eseguire questo sperimento bisogna forare la botte in punto *e* (*fig.* 97) della sua massima larghezza, ed ivi col mastice adattarvi un tubo in modo che il liquido non possa trapelare al di fuori. Supponendo che il fondo *ab* abbia 3 piedi di diametro, esso riceverà dall'acqua, di cui diamo piena la botte, una pressione eguale al peso di una colonna di acqua avente la base *ab* ed un piede e mezzo di altezza (come vedremo qui

appresso); in conseguenza se il tubo *eg* si alzi di piedi 13 $\frac{1}{2}$ sull'orlo di *ab*, la pressione su questo fondo diverrà 10 volte più grande, quando il tubo sarà pieno; e la resistenza del fondo difficilmente potrà eguagliare si forte pressione.

Sullo stesso principio è basata la costruzione del torchio idraulico, rappresentato dalla *fig.*108. A è un cilindro di bronzo o di ferro fuso, chiuso in basso ed aperto in alto con una luce più stretta della sua sezione interna. A guisa di stantuffo penetra nella luce il cilindro massiccio B, sormontato dal piano C. *fh* è una leva mobile intorno al punto *n*, destinata a mettere in azione lo stantuffo *k* della tromba *l*, la quale assorbe l'acqua dal recipiente G, e pel tubo *m* la spinge nel cilindro A. La pressione prodotta nella cavità di questo cilindro, solleva lo stantuffo B, e gli oggetti situati sul piano C vengono premuti contro il piano superiore solidamente fermato alle due colonne D.

Supponiamo che il braccio di leva *fn* sia lungo un metro, e sia 5 centimetri la distanza di *n* dal punto in cui la leva è fermata allo stantuffo *k*. Fingiamo inoltre che sull'estremo *f* si faccia uno sforzo equivalente al peso di 20 chilogrammi: per la teorica dei momenti (n.° 21) lo sforzo sullo stantuffo *k* sarà di chilogrammi $20.\frac{1}{0,05}=400$. Facciamo in fine che la sezione del tubo *m* sia $\frac{1}{50}$ di quella dello stantuffo B, ed allora la base di questo sarà spinta in alto con una forza equivalente a chilogrammi $400.50=20000$. Quindi si comprendono i grandi effetti che l'industria ha ottenuto dall'invenzione di questa macchina nelle operazioni che richieggono l'azione continuata di un'enorme pressione.

93. Passiamo ora a calcolare le pressioni che i liquidi fanno sulle pareti laterali dei recipienti. Sia *tc* (*fig.* 100) una di queste pareti, e faccia coll' orizzonte un angolo qualunque: *ls* sia il livello del liquido. Essendo ogni punto *v* della parete premuto in ragione dell' altezza *zv* del liquido sovrastante, la pressione dovrà essere nulla nell' intersezione *t* della parete colla superficie di livello, e massima in *c* che segna il luogo della maggiore

profondità. Quindi chiamando z la profondità variabile zv ed ω l'elemento di superficie bagnata, la pressione fatta sopra ciascuno di questi elementi sarà espressa da $\pi\omega z$, π disegnando la densità del liquido, ed ωz essendo il volume della colonna liquida infinitamente sottile che gravita sull'elemento ω. Ed indicando Σ la somma di tutte queste pressioni elementari, la pressione totale fatta sulla superficie tc sarà espressa da

$$\Sigma\pi\omega z = \pi\Sigma\omega z.$$

Or consideriamo gli elementi ω della superficie tc come espressioni di altrettante forze parallelle eguali, i loro luoghi come punti di applicazione di queste forze, e la superficie di livello ts come piano dei momenti; avremo che ωz sarà il momento di ciascuna forza, e $\Sigma\omega z$ sarà la loro somma, e per ciò eguale al momento della risultante. La quale, per essere le forze ω dirette tutte nel medesimo senso, pareggerà la loro somma ossia l'estensione A della superficie tc; e per essere tutte le componenti eguali, il punto di applicazione della risultante sarà il centro di gravità della medesima superficie tc. Laonde chiamando Z la distanza di questo centro dal piano ts, AZ sarà il momento della risultante, ed avremo l'equazione

$$AZ = \Sigma\omega z;$$

quindi

$$\pi AZ = \pi\Sigma\omega z.$$

Ma $\pi\Sigma\omega z$ rappresenta tutta la pressione che il liquido esercita sulla parete tc, dunque questa pressione sarà eziandio espressa da πAZ. Il quale prodotto, rappresentando il peso di una colonna liquida, di cui π è la densità, A la base e Z l'altezza, dimostra che la pressione fatta sulla parete laterale di un recipiente equivale al peso di una colonna dello stesso liquido, che avesse per base la superficie bagnata e per altezza la distanza del centro di gravità di essa superficie dal piano di livello. Or

questa legge essendo indipendente dall'angolo d'inclinazione della superficie bagnata col piano orizzontale, dovrà aver luogo anche quando la superficie diviene parallela all'orizzonte; ed in vero sappiamo che in questo caso la pressione fatta sul fondo di un recipiente eguaglia il peso di una colonna liquida di egual base, ed alta quanto il liquido contenuto, vale a dire di un'altezza eguale alla distanza che separa il livello del liquido dal centro di gravità della superficie bagnata. In conseguenza il teorema dimostrato deve riguardarsi come l'enunciato della legge generale che regola la pressione fatta da un liquido su qualsiasi parete di un recipiente.

Se la parete bagnata è il fondo orizzontale di un vase, è evidente che la risultante di tutte le pressioni elementari che il liquido vi esercita, passerà pel centro di gravità della superficie del fondo. Ma se consideriamo una parete inclinata tale che *tc* (*fig.* 100), allora crescendo la profondità del liquido da *t* a *c*, la risultante delle pressioni elementari dovrà trovarsi applicata ad un punto inferiore al centro di gravità della superficie, sempre però sulla sua linea di simmetria, purchè questa sia in un piano verticale. Questo punto della superficie bagnata, pel quale passa l'indicata risultante, dicesi *centro di pressione* [1].

Conosciuta questa legge veniamo ad un esperimento che sembra metterne in dubbio la realtà. Prendiamo un vase A (*fig.* 104) di qualunque forma, e pieno di acqua lasciamolo a galla poggiato sopra una tavoletta di sughero, in una vasca contenente lo stesso liquido in perfetta quiete. Il vase resterà nel luogo, ove l'avremo lasciato; nè senza l'intervento di una forza impressa lo vedremo solcare la superficie dell'acqua, sebbene piccolissima forza si richiedesse a produrre questo movimento. Questa pruova ci obbliga a conchiudere che le pressioni prodotte dal liquido sulle pareti opposte del recipiente sono geometricamente eguali. E che l'eguaglianza delle opposte pressioni produca la quiete del

[1] Rispetto alla determinazione del centro di pressione vedi la nota (H) alla fine di questo volume.

vase, vien messo fuor di dubbio dal seguente fatto: ad una delle sue pareti si adatti un piccolo tubo, chiuso (come rappresenta la figura) da un' apposita chiave; indi si empia di acqua il vase, e nel momento di adagiarlo sulla tavoletta di sughero si apra la chiave: in vece di vederlo immoto come nell'esperimento precedente, l'osserveremo scorrere sul liquido della vasca in direzione opposta allo sgorgo del tubo; moto evidentemente prodotto dalla pressione, che diminuita sulla parete *c* per la luce del tubo divenuta libera, ha reso preponderante quella fatta sulla parete *b*. Intanto le pareti opposte potranno avere forme, dimensioni ed inclinazioni differentissime; ed in tanta variabilità di condizioni potremo immaginare sempre soddisfatta l'opposta eguaglianza delle pressioni?

Per dichiarare compiutamente la ragione di equilibrio tra le pressioni delle pareti opposte, qualunque forma ed estensione esse abbiano, cominciamo dal supporre che il recipiente abbia una forma parallelepipeda rettangolare, come *abcd* (*fig.*102). In questo caso basta la sola simmetria della figura a dichiarare che le pressioni fatte dal liquido sulle facce interne *ab* e *cd*, *ad* e *bc* saranno eguali ed opposte. Ed in vero le pressioni essendo misurate dal peso di una colonna liquida avente per base la parete bagnata e per altezza la distanza del suo centro di gravità dalla superficie di livello, esse saranno eguali ed opposte nel caso che consideriamo; poichè le pareti *ab* e *dc*, a cagione di esempio, hanno i loro centri di gravità sopra una stessa orizzontale, parellela alle altre due facce *ac* e *bd*. E su queste ultime sarà facile ripetere lo stesso ragionamento.

Or qualunque sia la forma del vase, il principio delle proiezioni [1] ci offre il mezzo di poterla sempre ridurre al caso di

[1] Dal punto *a* (*fig.*106) dato fuori del piano *bc* conduciamo su questo piano la perpendicolare *aa'*, il piede *a'* di questa perpendicolare si dirà *proiezione* del punto *a*. Similmente se da tutti i punti del perimetro del triangolo *adc* conduciamo delle perpendicolari sul piano *dcd*, ne risulterà il triangolo *da'c* che sarà *proiezione* di *dac*. Or se dividiamo questo triangolo in elementi rettilinei segandolo con piani perpendicolari alla comune intersezione

un parallelepipedo rettangolare. Ed in vero supponendo sempre che le facce laterali siano verticali, poniamo che la base abbia la forma del trapezio *abcd* (*fig.* 105). Conduciamo la retta *mn* che divida i lati *ab* e *cd* per metà nei punti *s* e *t*; e da punti *a* e *d* conduciamo *ah* e *dg* perpendicolari sulla direzione *bc*. È noto che i centri di pressione sui rettangoli proiettati in *ab* e *cd* stanno nelle loro intersezioni col piano verticale che passa pei punti *s* e *t* delle loro basi; e nelle intersezioni collo stesso piano starebbero i centri di pressione dei rettangoli proiettati in *ah* e *dg*, se essi facessero da pareti al recipiente. Or le distanze di questi centri dalla superficie di livello dipendono dalle altezze dei rettangoli; ma le altezze sono eguali, dunque i centri di pressione stanno sopra una medesima orizzontale proiettata in *mn*. Ciò posto, essendo la pressione di sua natura normale alla superficie che la riceve, la risultante delle pressioni elementari fatte sulla parete *cd* sarà diretta secondo l'orizzontale *zt*, perpendicolare alla stessa *cd*. Decomponiamo questa risultante in due forze, l'una delle quali sia diretta secondo *mn* perpendicolare a *dg*. Chiamando A l'estensione del rettangolo proiettato in *cd*, Z la distanza del suo centro di gravità dalla superficie di livello, ed α l'angolo *mtz*, la componente secondo *mn* sarà $ZA\cos\alpha$. Ma per la teorica delle proiezioni $A\cos\alpha$ rappresenta l'estensione del rettangolo proiettato in *dg*, il quale ha il suo centro di gravità alla stessa profondità Z; dunque la componente secondo *mn* della pressione fatta dal liquido su *cd*, è la stessa in intensità e dire-

bc, avremo in ogni suo elemento *as* l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, di cui la proiezione *a's* sarà uno dei cateti; e perciò chiamando χ l'inclinazione del piano *adc* sul piano *bdc*, avremo $sa' = sa.\cos\chi$. E prendendo da una parte la somma di tutti gli elementi del triangolo, e dall'altra la somma delle corrispondenti proiezioni, sarà

$$a'dc = adc.\cos\alpha.$$

Applicando lo stesso ragionamento ad ogni altra figura piana, avremo il principio generale: *l'area della proiezione di qualsivoglia figura piana è eguale all'area di essa figura, moltiplicata pel coseno dell'angolo d'inclinazione del piano della figura col piano di proiezione.*

zione di quella che farebbe su *dg*. Similmente si dimostra che la componente secondo la stessa *mn* della pressione fatta su *ab* equivale in intensità e direzione a quella che avrebbe luogo sopra *ah*. Ma sappiamo che le pressioni su *ah* e *dg* sarebbero eguali ed opposte, tali dunque saranno ancora quelle fatte su *ab* e *cd* parellelamente ad *ad*.

Supponiamo in secondo luogo che il fondo fosse un quadrilatero, come *abcd* (*fig.* 107). Condotte le *sn* e *dg* parallele ad *ab*, e le *as*, *dm*,*cg*,*nb* alla stessa *ab* perpendicolari, è evidente pel principio delle proiezioni che le pressioni fatte su *ad*,*dc* e *cb* in direzione normale ad *ab*, equivalgono a quelle che avrebbero luogo su *sm* + *mn*; ed in direzione parallela ad *ab* avremo da un lato le pressioni su *as* + *dm*, e le equivalenti dal lato opposto su *bn* + *cg*. Or è facile estendere questo metodo di costruzione a qualunque altra figura si volesse dare al fondo; ed in conseguenza un vase di forma qualunque a pareti verticali non può avere alcuna tendenza a muoversi orizzontalmente.

Che se poi le pareti laterali del recipiente non fossero verticali, come *ab* e *cd* (*fig.* 103), allora immaginando delle sezioni orizzontali come *st* e *vg*, pel principio di proiezione avremo che le pressioni orizzontali fatte sugli elementi di superficie *zn* ed *xy* saranno eguali in intensità e direzione a quelle che si farebbero su *sv* e *tg* proiezioni di essi elementi sui piani verticali *ak* e *ch*. E dovendosi dire altrettanto di tutti gli altri elementi delle pareti *ab* e *cd*, è chiaro che le pressioni orizzontali che il liquido vi esercita, debbono necessariamente essere eguali ed opposte.

94. Il principio che regola le pressioni dei liquidi sulle pareti dei recipienti, offre come corollari — 1° la legge di equilibrio dei liquidi nei vasi comunicanti — 2° la legge dei galleggianti.

Siano A e B (*fig.* 109) due vasi comunicanti per mezzo del tubo C. Supponiamo che i vasi siano pieni di uno stesso liquido, e che in un punto qualunque del tubo C sia fatta la sezione *mn*. La pressione che il liquido contenuto in A esercita sulla sezione *mn*, sarà espressa dal prodotto di tre fattori, che sono l'area *a*

di *mn*, la distanza z del suo centro di gravità dalla superficie di livello, e la densità π del liquido. Similmente l'opposta pressione che sulla stessa *mn* fa il liquido contenuto in B, sarà $\pi a z'$, z' indicando la distanza del centro di gravità di *mn* dalla superficie di livello del vase B. Or perchè il liquido sia in equilibrio, debbono essere eguali le opposte pressioni fatte sulla sezione *mn*, e perciò deve aver luogo l'equazione.

$$\pi a z = \pi a z',$$

ossia

$$z = z'.$$

Dunque le superficie di livello nei due vasi comunicanti A e B debbono essere equidistanti dal piano orizzontale condotto pel centro di gravità dalla sezione *mn*, ed in conseguenza le due superficie di livello staranno in un medesimo piano orizzontale.

Se poi A e B contengono liquidi di diversa densità, allora chiamando π la densità del liquido di A e π' quella del liquido di B, la condizione di equilibrio dei due liquidi sarà data dall'equazione

$$\pi a z = \pi' a z',$$

donde

$$z : z' = \pi' : \pi.$$

Vale a dire che le altezze delle superficie di livello sul piano orizzontale che passa pel centro di gravità della sezione *mn*, debbono essere inversamente proporzionali alle densità dei due liquidi.

È d'uopo però osservare che il diametro del tubo C di comunicazione dev'essere abbastanza piccolo per impedire le correnti che i liquidi tenderebbero produrre se avessero una densità assai diversa. Supponiamo, per esempio, mercurio nel vase A ed acqua in B: il mercurio, perchè più denso, tenderà scorrere per la parte inferiore del tubo C, e l'acqua per la superiore. Una volta che queste due correnti avranno potuto stabilirsi, il mercurio finirà coll'occupare, se in quantità sufficiente, tutta la capacita del tu-

bo di comunicazione, e l'acqua resterà galleggiante nei due vasi A e B. Questa necessità di un piccolissimo diametro nel tubo di comunicazione rende insensibile l'errore in cui si cade enunciando come suol farsi, la legge dei vasi comunicanti nel seguente modo: *le altezze dei liquidi debbono essere inversamente proporzionali alle loro densità*: senza specificare il luogo, donde queste altezze si debbono misurare.

Ciò che abbiamo detto rispetto alla superficie di livello di un liquido contenuto in un solo recipiente (n.° 90) ha luogo pei tubi comunicanti; vale a dire che se due di questi tubi s'immaginano situati a grandi distanze le rispettive superficie di livello della massa liquida non saranno più in un medesimo piano orizzontale, ma staranno sopra una stessa superficie sferoidale, determinata dall'equilibrio tra la forza di gravità, la forza centrifuga prodotta dal moto di rotazione della terra, e la ripulsione termica corrispondente al grado di latitudine ed alla stagione. E quantunque speciali correnti possono in taluni golfi elevare l'acqua del mare al disopra di questa superficie normale [1], purtuttavia il livello del mare è ciò che vi ha di meno variabile circa la superficie terrestre. Quindi i geografi lo riguardano come termine di livellazione, vale a dire di relativa altezza dei luoghi rimarchevoli di una vasta contrada;dal livello del mare, per esempio, si misurano le altezze dei punti culminanti di una catena di monti.

95. La legge delle pressioni sulle pareti dei recipienti dichiara le condizioni di equilibrio dei solidi immersi nei liquidi. Sia A (*fig.* 112) il solido immerso in una massa liquida, di cui MN sia la superficie di livello. Per un elemento qualunque zt della superficie del solido immaginiamo condotte le orizzontali zz', tt' e le verticali zg, th. Dal principio delle proiezioni si rileva che la componente orizzontale della pressione fatta dal liquido sull'elemento zt equivale al peso della colonna liquida che ha ts co-

[1] Il livello del Mar Rosso si eleva su quello del Mediterrano di 9m,9 nelle alte maree e di 8m,12 nelle basse, come si è rilevato dalla livellazione fatta da una commissione d'ingegneri francesi nella spedizione di Egitto sotto Bonaparte.

me base e l'altezza *hs*; e l'opposta pressione su *t's'* avendo lo stesso valore, le due pressioni saranno in equilibrio. Ripetendo la stessa osservazione per tutti gli altri elementi della superficie, si viene alla conseguenza che il solido immerso non può ricevere dalle pressioni del liquido veruna tendenza a movimento orizzontale.

Della stessa pressione fatta sull'elemento *zt* cercandone la competente verticale, troviamo per lo stesso principio ch'essa equivale al peso della colonna liquida che ha per base la proiezione *zs* e l'altezza *hs*: dunque il liquido con una forza equivalente a questo peso spingerà dal basso in alto l'elemento *zt*. Ma l'elemento *mv*, determinato dalle stesse verticali *zg* e *th* è premuto dall'alto in basso dal peso della colonna liquida *mh*; in conseguenza l'elemento solido *zmvt* è spinto in alto dalla differenza delle due pressioni, vale a dire dal peso di una colonna liquida di un volume eguale al suo. Ripetendo la stessa costruzione per tutti gli altri elementi della superficie bagnata, troveremo che la pressione del liquido sul corpo immerso produce una spinta verticale dal basso in alto, misurata dal peso di una massa liquida di un volume eguale a quello del solido.

Questa spinta dal basso in alto essendo direttamente opposta alla gravità, deve di necessità produrre un'equivalente diminuzione nel peso del corpo immerso; ed ecco dichiarato il principio idrostatico scoverto da Archimede: *un corpo immerso in un fluido perde tanto del suo peso, quanto è quello del volume fluido discacciato*. La realtà di questo principio, indubitabile perchè conseguenza necessaria di principi reali, può essere tra certi limiti direttamente pruovata nel seguente modo. Si costruisca un cilindro massiccio, di ottone per esempio, ch' entri esattamente in un cilindro cavo dello stesso o di altro metallo. Si pongano i due cilindri in una coppa di bilancia, e si equilibrino con pesi nell'altra coppa. Indi con un filo si sospenda alla sua coppa il cilindro massiccio, e si faccia pescare in una massa di acqua; all'istante la bilancia s'inclinerà dal lato opposto, ed in tal modo farà chiara la perdita di peso sofferta dal

cilindro immerso. Allora si tolga il cilindro cavo, si empia di acqua, e poi si torni sulla coppa che lo sosteneva; l'equilibrio si vedrà immediatamente ripristinato. Dunque il cilindro immerso ha perduto un peso eguale a quello dell' acqua contenuta nel cilindro cavo, vale a dire un peso eguale a quello del volume liquido discacciato.

Dal principio di Archimede risulta — 1° che se il solido immerso ha una densità eguale a quella del liquido, esso resterà in equilibrio a qualunque profondità — 2° che il solido verrà a galla, se avrà una densità minore di quella del liquido; ed in questo caso il volume liquido discacciato dalla parte immersa eguaglierà il peso dell'intero solido — 3° che finalmente il solido scenderà al fondo del recipiente, se abbia una densità superiore a quella del liquido [1].

Nella ipotesi che per la relazione tra la densità del liquido e quella del solido immerso quest'ultimo sia spinto verso la superficie di livello, si potrà facilmente calcolare qual frazione del volume del solido nuoterà nel liquido, quando siano note le densità dei due corpi. Chiamiamo v il volume del solido, x la fra-

[1] Taluni fisiologi, che quantunque appellati *dottori fisici*, partuttavia non hanno meditato a sufficienza le leggi idrostatiche, muovono seriamente dei dubbi sulla preponderanza della densità del corpo umano rispetto all'acqua; senza por mente che mentre diversi animali non aquatici, come cani, buoi, pecore, porci, ec. traversano fiumi a nuoto, essi fisiologi *nageraient comme le caillou*, se per avventura non avessero apparato a nuotare. Quando gli arti trovano a far puntello, la contrazione muscolare può impedire la caduta del corpo; ma se il fulcro manca, l'animale cade come ogni corpo inorganico. Se fossimo più leggieri dell'acqua, tutti i nostri sforzi sarebbero inutili a farci scendere verso il fondo del mare; appunto perchè siamo più pesanti, abbiamo bisogno dell'arte del nuoto, vale a dire del modo di servirci dei nostri arti, come i volatili si servono delle ali. E se ogni nnotatore oppone a questa spiegazione la sua sperienza, ciò avviene perchè l'abitudine ha reso inavvertibili gli atti della sua volontà. Ed in vero, qual sarebbe poi la ragione dell'impossibilità di restare a galla, quando i muscoli delle gambe sono affetti da quella spasmodica contrazione denominata *granchio*? E d'altronde potrebbe egli sostenersi sull'acqua con mani e piedi ligati?

zione sotto acqua, π la densità di questa, d quella del solido. Poichè il volume x del liquido discacciato ed il volume v del galleggiante hanno lo stesso peso, essi saranno in ragione inversa delle densità, e quindi avrà luogo la proporzione

$$x : v = d : \pi;$$

donde

$$x = \frac{vd}{\pi}.$$

La densità del ghiaccio, per esempio, è circa 0,9 di quella dell'acqua di mare; quindi la frazione di volume che resterà immersa nel galleggiare del ghiaccio sarà

$$x = \frac{9}{10} v.$$

Nei mari glaciali non è raro il veder galleggiare *montagne di ghiaccio*, le quali si elevano centinaia di piedi sul livello dell'acqua. Se la parte che sporge dal mare è per l'equazione precedente 0,1 di tutto il volume, sarà facile da essa arguire la prodigiosa grandezza dell'intera massa.

96. Sia *abcd* (*fig.* 110) la sezione fatta da un piano verticale condotto pel centro g di gravità di un galleggiante di densità uniforme, e simmetrico rispetto al piano *bd*. Supponendo il corpo equilibrato sul liquido, la superficie di livello *mn* dovrà essere perpendicolare a *bd*, e su questa retta dovrà stare ancora il centro h di gravità del volume liquido discacciato, e pel quale centro passa la risultante delle pressioni verticali fatte dal liquido.

Or supponiamo che il galleggiante venga inclinato sul livello *mn* (come rappresenta la *fig.* 111) e poi abbandonato a se stesso. Se in questo movimento il centro di gravità g non ha potuto mutar sito sul piano di simmetria, il centro h viceversa si troverà fuori di questo piano pel cangiamento avvenuto nella forma del volume liquido; e poichè una forza si può immaginare applicata ad un punto qualunque della sua direzione, così riguar-

deremo applicata la spinta del liquido nel punto *k*, in cui la verticale *hk* incontra il piano di simmetria *bd*. Questo piano sarà dunque sollecitato da una *coppia* (n° 18) di cui una componente è il peso del corpo applicato al centro *g* di gravità, e che lo spinge dall'alto in basso, e l'altra componente è l'opposta spinta del liquido applicata al punto *k*: la coppia tenderà svolgersi ed il piano *bd* sarà restituito alla prima posizione verticale. Il punto *k*, in cui la direzione della spinta incontra il piano di simmetria del galleggiante, si nomina *metacentro*; quindi se il galleggiante deviato dalla sua posizione di equilibrio, tiene il *metacentro* superiore al centro di gravità, esso tenderà ritornarvi, ed in conseguenza l'equilibrio donde è stato rimosso, era stabile; viceversa sarebbe stato instabile, se il *metacentro* fosse stato inferiore al centro di gravità. L'unico caso poi che può dare un equilibrio indifferente, ha luogo quando movendosi il galleggiante la forma del volume liquido discacciato resta invariabile; e tale condizione può essere soddisfatta soltanto da un solido di rotazione di uniforme densità.

Ma se il corpo immerso nel liquido lo pareggiasse in densità, allora a qualunque profondità potrebbe restare in equilibrio. Sia A (*fig.* 113) il corpo immerso; MN il livello del liquido. Se il solido ha una densità uniforme, il suo centro *g* di gravità si confonderà con quello del volume liquido discacciato; e comunque il solido giri nel fluido, i due centri staranno sempre confusi insieme, perchè il volume fluido discacciato avrà sempre la forma del corpo immerso. Quindi l'equilibrio sarà indifferente, poichè essendo soddisfatto in una posizione del solido, lo sarà eziandio in tutte le altre posizioni.

Se poi la densità del corpo immerso, (B e C) eguagliando tuttavia quella del liquido non fosse uniforme; per esservi equilibrio è d'uopo che il centro *g* di gravità del solido, ed il consimile centro *o* del volume liquido discacciato siano in una stessa verticale. E l'equilibrio, com'è facile a comprendersi, sarà stabile se il centro di gravità del solido sarà inferiore a quello del liquido, ed instabile nel caso opposto.

CAPO SECONDO.

Fenomeni capillari.

97. *a*). Se in una massa di acqua (*fig.* 114) introduciamo dei tubi di vetro di piccolo diametro, vedremo il liquido elevarsi tanto più nell'interno del tubo, per quanto è minore il suo diametro. La superficie di livello nell'interno del tubo non è piana ma concava; ed all'esterno del tubo l'acqua si eleva intorno alla sua parete, formandovi un anello concavo.

Questo fenomeno ha luogo, qualunque sia la sostanza del tubo, e qualunque sia il liquido, purchè atto a bagnare il solido. Così l'acqua, l'alcool, l'etere, gli olî, ec. ascendono nei tubi di vetro; il mercurio sale nei tubi formati da metalli che possono amalgamarsi.

Per uno stesso diametro l'innalzamento del liquido dipende dalla sua natura, da quella del tubo e dal grado di temperatura; ma se il tubo sia stato previamente bagnato dal liquido, in cui dovrà immergersi, allora l'influenza della speciale natura del solido è pressocchè nulla, e l'altezza della colonna elevata sul livello esterno dipende dalla natura del liquido e dalla sua temperatura.

b) Se viceversa immergiamo dei tubi di vetro in un bagno di mercurio (*fig.* 117), osserveremo—1° il livello interno più basso dell'esterno—2° la depressione tanto più grande, per quanto è minore il diametro del tubo — 3° la superficie del livello interno convessa, ed all'esterno il mercurio depresso in contatto del vetro, dimodocchè forma un anello convesso intorno al tubo.

Lo stesso fenomeno il mercurio presenta coi tubi di ferro e di platino; e l'acqua fa altrettanto coi tubi di vetro unti di grasso nell'interno; ma questa depressione dell'acqua è momentanea, poichè bentosto si eleva, trasformando la superficie di livello da convessa in concava.

In generale i liquidi si deprimono in contatto dei solidi, quando sono incapaci di bagnarli; ma se ricevessero una modificazio-

ne che favorisse la loro adesione ai solidi, allora cessano di deprimersi. Così Casbois con prolungata ebollizione ottenne che il mercurio non si deprimesse in contatto del vetro; ed il Dulong conobbe che ciò dipendeva dall'ossido che si era formato alla superficie del metallo e che si era poi disciolto nel resto della massa.

La speciale natura del solido e del liquido, ed il diverso grado di temperatura hanno influenza sulla depressione come sull'innalzamento dei liquidi nei tubi di piccolo diametro.

c) Se in un liquido capace di bagnare il vetro immergiamo due lamine parallele di questa sostanza (*fig.* 115) il liquido si eleverà tra esse ad un'altezza metà di quella che avrebbe avuto luogo in un tubo di diametro eguale alla distanza delle lamine. La superficie del livello interno sarà quella di un mezzo cilindro concavo, ed all'esterno il liquido si eleverà sulle pareti della lamine, disponendosi in superficie curva, simile ad un quarto di concavità cilindrica.

Viceversa avverrà immergendo le due lamine in un liquido incapace di bagnare il vetro, com'è il mercurio. Il livello interno (*fig.*116) sarà più basso dell'esterno per una metà della depressione che avrebbe presentata un tubo di diametro eguale alla distanza delle lamine: la superficie del livello interno sarà cilindrica convessa, ed all'esterno il liquido con una simile curvatura resterà depresso in contatto della lamina.

98. Queste apparenti anomalie delle leggi idrostatiche hanno ricevuto il nome di *fenomeni capillari*, perchè osservati la prima volta in tubi di piccolissimo diametro. E poichè all'epoca della loro scoverta [1] non si aveva idea di forze racchiuse nell'infinitesima sfera di azione delle molecole dei corpi, così non si

[1] Il fenomeno dei tubi capillari era ignoto a Pascal, poichè nel suo trattato sull'equilibrio dei liquidi egli generalizza le condizioni di equilibrio nei tubi comunicanti, qualunque sia il loro diametro. L'editore di quest'opera di Pascal attribuisce la scoverta di questi fenomeni al fisico Rho di cui loda la grande perizia nello sperimentare.

poterono altrimenti considerare che quali effetti di azioni meccaniche esterne, le quali dovevano essere permanenti, come i fenomeni che n'erano prodotti. Una cagione di questo genere, allora di recente scoverta, era la pressione atmosferica; e perciò ad una differenza di questa pressione tra l'interno e l'esterno del tubo furono attribuiti i fenomeni capillari: la qual differenza non si poteva altrimenti riguardare che come prodotta da un difficile accesso che la piccolissima luce del tubo presentava alle molecole dell'aria. E se obbiettavasi che i fenomeni capillari avvengono egualmente nel vôto pneumatico, si rispondeva che questo vôto non essendo giammai perfetto, la rarefazione dell'aria lasciava sempre sussistere la differenza di pressione tra l'esterno e l'interno.

Per distruggere questo del pari che ogni altro sistema fondato sull'idea di una pressione esterna, bastava osservare che l'elevazione dei diversi liquidi nei tubi capillari non segue affatto la ragione inversa delle loro densità, come dovrebbe necessariamente avvenire, se fosse prodotta da una forza premente esterna. Così l'alcool e gli oli, più leggieri dell'acqua, si elevano meno di questo liquido nei tubi capillari.

Al sistema di una gravità molecolare estesa a tutti i corpi del mondo planetario tennero dietro le idee newtoniane di un'attrazione molecolare a minime distanze; ed in questa veduta si ebbe il vero principio della spiegazione dei fenomeni capillari, come prodotti da una reciproca azione tra le molecole dei liquidi e quelle dei solidi che ne sono bagnati. Ma i fisici, forse perchè nuovi a simili considerazioni, non seppero dapprima immaginare abbastanza piccola la sfera di azione sensibile delle forze molecolari. Così Hauksbée riguardava come cagione d' innalzamento della colonna liquida in un tubo capillare l'attrazione dell'anello vitreo sulla falda liquida che ne viene a contatto nel momento dell'immersione. Per quest'attrazione il peso della falda diminuisce, la pressione del liquido esterno la spinge dentro del tubo, ed una seconda falda passa al luogo della prima: alla seconda succede la terza, a questa la quarta ec: finchè il peso di tutta la

colonna elevata non eguagli la forza attrattiva del vetro. Indi Jurin, che al pari di Hauksbée fece molte sperienze sui tubi capillari, si avvenne nel seguente fatto: egli saldò l'uno dopo l'altro due tubi capillari di diverso diametro, poi tenendo in basso il più largo l'immerse nell'acqua, ed osservò che questa saliva nel tubo più stretto, come se avesse avuto lo stesso diametro in tutta la sua lunghezza. Donde conchiuse che la forza attraente non poteva aver sede nell'anello vitreo che toccava la falda liquida, ma che doveva trovarsi nell'anello vitreo immediatamente superiore.

Da questa dichiarazione dei principî fondamentali donde movevano le spiegazioni di Hauksbée e di Jurin si rileva ch'essi assegnavano alla sfera di azione molecolare un valore troppo grande, perchè l'estendevano a tutto il raggio del tubo, il quale per quanto si voglia piccolo, sarà sempre una quantità finita. Weitbrecht, che pubblicò sui fenomeni capillari un esteso lavoro, fu il primo ad assegnare un limite conveniente alla distanza che rende nulla l'azione delle forze molecolari. Egli sostenne che nella colonna liquida sollevata in un tubo capillare bisognava distinguere la falda superficiale dalla colonna centrale; la prima era sostenuta dall'attrazione del vetro, e sosteneva poi dal canto suo la colonna centrale per mezzo della coesione.

Se queste vedute offrivano i primi elementi per la spiegazione dei fenomeni capillari, erano poi ben lontane dal dichiararne le principali circostanze. Una soddisfacente ragione di questi fatti non poteva rinvenirsi che nella compiuta soluzione di un problema, in cui si fossero cercate le condizioni di equilibrio di una colonna liquida sottoposta alle forze del calore, della gravità, della coesione ed adesione; forze di cui non si conosce altra legge in funzione dello spazio, se non quella di esser nulle ad una distanza finita dal centro di azione. Tre insigni geometri successivamente si accinsero alla soluzione di sì arduo problema: Claireaut, Laplace, e Poisson.

Claireaut fu il primo a riguardare i fenomeni capillari nella loro dipendenza dalla superficie concava o convessa che i liquidi

prendono nell'interno dei tubi, circostanza negletta da tutti i fisici che lo avevano preceduto in simili ricerche. Ma volle l'azione delle forze molecolari sensibile ad una distanza finita dal contatto delle molecole, quindi la sua teoria si trovò inutilmente complicata di termini che di loro natura erano evanescenti. La teoria di Laplace al contrario riguarda le forze molecolari sotto quella funzione dello spazio che ad esse conviene, vale a dire che le considera sottoposte alla legge di esser nulle ad una distanza finita dal contatto; ma egli non pose a calcolo nè l'azione del calore, nè la rapida variazione di densità che deve aver luogo sì nella superficie di livello, che in quella a contatto coll'interna parete del tubo. Per queste due importanti correzioni si distingue specialmente la *Nuova teoria delle azioni capillari* di Poisson [1].

99. I risultamenti ottenuti dalle ricerche dei geometri sui fenomeni di capillarità diedero occasione ad indagini sperimentali per conoscere fino a qual punto la teoria ed il fatto andassero di accordo. Haüy e Tremery, a suggerimento di Laplace, eseguirono delle sperienze tanto sui liquidi che bagnano il vetro, come l'acqua, l'olio di melarancia ec., quanto sul mercurio, che non lo bagna. Per una media tra diverse sperienze essi trovarono che in un tubo di 1^{mm} di diametro l'acqua si eleva

[1] Se nell'esposizione di parecchie teoriche quest'opera presenta talune volte delle formole, di cui almeno nel testo manca la dimostrazione, ciò si è fatto quando essa dimostrazione richiedeva l'uso del calcolo superiore, mentre la formola è una funzione immediata di quantità date, o almeno capaci di misura diretta. Così le leggi delle oscillazioni dei pendoli stanno nella formola $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, nella quale essendo g costante per uno stesso luogo di osservazione e π essendo dato dalla geometria, t ed r possono valutarsi direttamente. Ma quando la formola finale rispetto alle quantità assegnabili nel problema è una funzione mediata di molte altre funzioni già definite nel processo del calcolo, allora essa non può essere disgiunta dalla sua dimostrazione senza renderla del tutto inutile. Per queste considerazioni non abbiamo arrecato nel testo veruna formola riguardante i fenomeni capillari, la cui teoria non ha raggiunto ancora quel grado di perfezione e quindi di semplicità, ch'è necessario per introdurla in un'opera elementare.

di 13mm ,569 e l'olio di melarancia di 6mm ,739: il mercurio poi si deprimeva di 7mm ,333. Questa depressione essi la misuravano nel seguente modo, immergevano il tubo in un bagno di mercurio ad una profondità esattamente determinata; indi facevano scorrere per l'orifizio inferiore del tubo un piano levigato in modo da servirgli di fondo, e così sostenuto il tubo lo toglievano dal bagno e misuravano l'altezza della colonna interna, la quale comparata alla profondità a cui il tubo si era fatto scendere, offeriva nella differenza delle due altezze il valore della depressione. Questo metodo, oltre ad essere suscettibile di poca precisione, è inapplicabile al caso dei tubi opachi, come son quelli fatti di metallo. A tal riguardo Avogadro nelle sue ricerche sui fenomeni capillari si è servito dell'apparecchio rappresentato dalla *fig.* 119. *ac* è un tubo di vetro di circa 2 centimetri di diametro e di 4 a 5 centimetri di lunghezza: l'orifizio inferiore di questo tubo è chiuso da un cilindro di sughero *bc*, nel cui asse è fermato il tubo *ef*, da sottoporsi all'esperimento: a livello dell'estremità superiore del tubo *ef* corrisponde lo zero di una scala in millimetri segnata sulla parete *ab* del tubo di vetro. Quando si vuol osservare la depressione nel tubo *ef* si ferma il tubo *ac* mediante l'appendice *di* ad un sostegno che per mezzo di un movimento a vite permette farlo discendere insensibilmente in un bagno di mercurio; e si arresta poi la discesa di *ac*, quando il mercurio presenta l'apice della sua convessità al livello dell'orifizio *e*. Allora osservando il livello *mn* a quale divisione corrisponde, si ha in millimetri il valore della depressione.

Haüy e Tremery si occuparono ancora di misurare la concavità della superficie dei liquidi nei tubi capillari. Essi fecero entrare una piccola colonna di acqua in un tubo di vetro di 2 millimetri di diametro; e dopo aver chiuso il tubo nei due estremi affinchè la resistenza dell'aria racchiusa impedisse la caduta della colonna liquida, essi lo fermarono verticalmente, ed avendo misurato con diligenza sì *ac* (*fig.* 118) che *mn*, trovarono che la differenza di queste due linee era di $\frac{41}{48}$ del diametro *ab*, e perciò

sm metà di *ac* — *mn* (trascurando la piccola differenza che la gravità del liquido apportava nelle due frecce *sm* ed *nt*) era $\frac{41}{48}$ del raggio *as*. Così la teoria, che voleva $sm = as$, restava abbastanza confermata da questo risultamento, avendo riguardo alla somma difficoltà di assegnare il vero limite in cui finisce quel velo liquido che l'acqua forma sulla parete interna del tubo.

Le sperienze di Haüy e Tremery in quanto ai valori assoluti dell'elevazione o della depressione dei liquidi nei tubi capillari erano molto discordanti dai risultamenti ottenuti da altri fisici, nè avevano raggiunto quel grado di precisione matematica, che solo può sostenere o abbattere una teoria. Dietro invito dello stesso Laplace fu più tardi eseguita da Gay-Lussac una nuova serie di ricerche sperimentali. Egli trovò dapprima (e quest'osservazione era stata già fatta da Hauksbée) che l'acqua sale più o meno in un medesimo tubo di vetro, secondochè l'interno del tubo è stato precedentemente bagnato dallo stesso liquido, ovvero si è trovato secco; e poichè la teoria suppone che il liquido si elevi in un tubo formato da un velo cilindrico dello stesso liquido; così Gay-Lussac non adoperò che tubi interamente bagnati nell'interno.

La precisione dell'esperimento consisteva in massima parte nel determinare esattamente il diametro interno del tubo, e l'altezza della colonna liquida che in forza della capillarità vi restava sospesa. Per conoscere il diametro interno del tubo Gay-Lussac si servì del metodo delle pesate; vale a dire che dopo essersi assicurato che il tubo era a sufficienza calibro, egli lo pesava prima vôto, e poi lo ripesava dopo averlo in parte pieno di mercurio, che vi occupava una lunghezza di *n* millimetri da lui misurata esattamente. Chiamando *p* la differenza dei due pesi, *r* il semidiametro del tubo, π il rapporto della circonferenza al diametro, *m* la densità del mercurio, il volume che questo liquido occupava nell'interno del tubo era $\pi n r^2$, ed in conseguenza era il suo peso $p = \pi m n r^2$; donde $r = \sqrt{\frac{p}{\pi m n}}$.

Per misurare poi esattamente l'altezza della colonna liquida elevata nel tubo, Gay-Lussac inventò l'apparecchio rappresentato dalla (*fig.* 122). *a b* è un largo cilindro di vetro destinato a contenere il liquido: esso è poggiato sopra una base sorretta da tre viti, onde poter disporre orizzontalmente l'orifizio superiore *b*. Il tubo *d* destinato all'esperimento è chiuso in una scanalatura fatta sulla lamina *e* perpendicolarmente al suo orlo inferiore. *f* è una riga graduata, che sorretta da tre viti si drizza verticale per mezzo del piombino *p*. Un cannocchiale *g* di corto foco, e munito di micrometro può scorrere lungo la riga graduata, conservando orizzontale il suo asse. Volendo misurare l'altezza della colonna liquida sospesa nel tubo, si farà muovere il cannocchiale finchè il filo orizzontale del micrometro divenga tangente al punto infimo della concavità che forma la superficie di livello del liquido interno; indi si fa scorrere la tavoletta *e* sull'orifizio *b*, onde il tubo *d* si faccia da un lato del recipiente, senz'alterare il livello *c*; ed al suo luogo si pone l'asta *kt* tenuta verticalmente dalla tavoletta *h* che poggia sull'orifizio del vase *a b*. L'asta essendo formata a vite si può farla discendere finchè la punta *t* tocchi la superficie del liquido contenuto nel recipiente. Allora con un vasetto sospeso ad un filo di ferro si toglie tant'acqua dal recipiente da lasciare libera la punta *t*; su questa si dirige il punto di mira del cannocchiale, che col numero di divisioni percorse sull'asta graduata nel passare dalla prima alla seconda posizione, misurerà l'altezza della colonna liquida elevata nel tubo sottoposto all'esperimento.

Con questo metodo Gay-Lussac trovò che in un tubo di vetro bianco perfettamente bagnato nell'interno, che aveva in millimetri il diametro 1,29441 l'acqua si elevava di millimetri 23,1634 alla temperatura di circa 8°,5; e poichè la teoria matematica dei tubi capillari vuole che quest'altezza si aumenti del sesto del diametro, così essa diviene 23,3791. Per un secondo tubo di vetro, il cui diametro era di millimetri 1,99381 si ebbe l'altezza, corretta del sesto del diametro, eguale a millimetri 15,9034, la temperatura essendo la stessa. Or calcolando quest'ultima eleva-

zione secondo il principio teoretico della ragione inversa del diametro, si avrebbe 15,896 differente di soli 0,0077 di millimetro del dato sperimentale.

Per conoscere ora la divergenza dei risultamenti ottenuti da Gay-Lussac da quelli di Haüy e Tremery, basta osservare che secondo la legge della ragione inversa del diametro l'altezza dell'acqua nel loro tubo di un millimetro di diametro, comparata a quella del primo sperimento di Gay-Lussac qui sopra notato, dovrebbe soddisfare alla proporzione

$$1 : 1{,}29441 = 23{,}1634 : x$$

donde $x = 29{,}9829$, valore più che doppio di 13,569 trovato da Haüy e Tremery.

110. Se alla teoria matematica dei fenomeni capillari appartiene di svelare la relazione ch'esiste tra lo stato della superficie (concava o convessa) e l'innalzamento o la depressione della colonna liquida conteuuta nel tubo; purtuttavia comparando i dati dell'esperienza su questa classe di fenomeni alla teorica generale dei vasi comunicanti esposta nel capo precedente, è facile dedurre che la convessità della superficie di livello in un tubo capillare agisce egualmente che una pressione diretta dall'alto in basso, mentre che la concavità di essa superficie equivale ad una forza di aspirazione diretta invece dal basso in alto. E poichè la stessa sperienza dimostra che la curvatura della superficie, sia essa concava o convessa, è tanto più grande per quanto il diametro del tubo è più piccolo, e che nella stessa ragione ancora aumentano le differenze di livello tra l'interno e l'esterno; così bisogna conchiudere che l'intensità delle dette forze di pressione ed aspirazione è ancora proporzionale alla curvatura della superficie. Premessi questi due principî, è facile rendere ragione dei seguenti fatti.

— 1.° Immergiamo nell'acqua un tubo di vetro perfettamente bagnato nell'interno, e misuriamo l'altezza a cui il liquido ascende. Indi ammollendo il tubo coll'azione di una fiamma, voltiamolo in un sifone a braccia diseguali (*fig.* 123), e poi versiamo in es-

so dell'acqua a poco a poco. Finchè il liquido non sia pervenuto all'orificio del braccio corto, si resterà nei due rami del sifone alla medesima altezza, terminandovi con due superficie concave: ma quando poi avrà toccato quel limite, vedremo dapprima la concavità diminuire, indi trasformarsi in una superficie piana, infine divenire convessa; e dopo di aver toccato l'ultimo estremo di questo nuovo stato di curvatura, il liquido comincerà a sgorgare dal braccio corto. Or se misuriamo la differenza di livello nelle due braccia del tubo, quando la convessità è divenuta emisferica all'orifizio del braccio corto, troveremo una differenza di livello assai più grande di quella prodotta dalla semplice immersione del tubo nell'acqua. Ciò dipende dall'azione premente della convessità della superficie liquida all'orifizio del tubo, la quale azione aggiunta al peso della colonna liquida contenuta nel braccio corto vale a sostenere una colonna liquida più alta nell'altro braccio.

—2.° Le (*fig.* 120 e 121) rappresentano due tubi conici di vetro, formati in modo che i loro assi siano orizzontali. Facendo entrare in uno di essi una goccia di acqua nell'altro una goccia di mercurio, le due gocce non resteranno ferme; la prima camminerà verso il vertice del cono, la seconda verso la base. Il moto della prima goccia dipenderà da un eccesso di aspirazione verso il vertice prodotto da una maggiore curvatura della corrispondente superficie concava; e la maggior curvatura della convessità similmente posta produrrà nell'altra goccia un eccesso verso la base.

— 3.° Immergiamo nell'acqua verticalmente ed a piccola distanza due lamine parallele di vetro A e B (*fig.*128). Il liquido si eleverà tra esse superiormente al livello esterno *mm* formando la sua superficie di livello in un canaletto concavo. Per un punto *a* di questa superficie curva immaginiamo il canaletto elementare *abcm*, il cui braccio orizzontale *bc* non potrà restare in equilibrio, se le due colonne verticali *ab* ed *mc* non fossero egualmente pesanti; e per ciò la forza di aspirazione, che la concavità della superficie produce nel punto *a*, è misurata dal peso della colonna $an=ab-mc$, ed in conseguenza un punto *h* situato sulla porzione immersa della lamina, dovrà restare in equilibrio, perchè sottoposto

alle pressioni eguali e contrarie *az* ed *me*. Ma se consideriamo sulla lamina B un punto *s* superiore al livello esterno ed inferiore all' interno, questo punto per la forza aspirante della concavità, più grande del peso della colonna liquida *at*, soffrirà una trazione da fuori in dentro mediante l'adesione dell'acqua al vetro: lo stesso avvenendo all'altra lamina, esse s'inclineranno l'una verso l'altra con un movimento accelerato, poichè a misura che si avvicinano, la curvatura della superficie concava aumenta ed in conseguenza la forza di trazione.

Supponiamo in secondo luogo che il sistema delle due lamine sia immerso in un bagno di mercurio. Questo liquido, come è noto, resterà depresso sotto il livello esterno *mm* secondo una convessità cilindrica: sulla quale prendendo un punto *a'* e conducendo il canaletto elementare *a'bcm*, avremo per condizione di equilibrio che le due colonne verticali *a'b* e *mc* sieno egualmente pesanti, vale a dire che la pressione prodotta nel punto *a'* dalla convessità della superficie sarà misurata dalla differenza di peso delle due colonne *mc* ed *a'b*. Quindi un punto *g* preso sulla porzione immersa della lamina resterà in equilibrio, perchè riceve dal liquido pressioni eguali ed opposte: al contrario il punto *h* inferiore al livello esterno e superiore all'interno riceverà dal peso della colonna *me* una spinta da fuori in dentro. Tutti i punti delle due lamine, che si trovano nella stessa condizione del punto *h*, saranno similmente spinti da fuori in dentro, e questo eccesso di pressione esterna spingerà le lamine l'una verso l'altra.

Supponiamo infine che nell'acqua siano immerse una lamina di vetro B (*fig.* 127) ed una tavoletta incerata A. Quest'ultima deprimerà il liquido perchè incapace di esserne bagnata, l'altra lo innalzerà per adesione; in conseguenza tra le due lamine la curvatura della superficie di livello presenterà un punto d'inflessione *o*, in cui la convessità *zo* si cambierà nella concavità *os*. Or sappiamo che la convessità del liquido è accompagnata da una forza di pressione cospirante colla gravità, mentre la superficie concava al contrario va congiunta ad una forza di aspirazione: quindi le due curvature *oz* ed *os* saranno animate da forze oppo-

ste, e l'effetto risultante rappresenterà la differenza delle due opposte azioni. Perciò i punti di *zo* saranno superiori a quello del livello *mn*, e sulla faccia esterna della lamina B vi saranno dei punti bagnati dal liquido, all'altezza dei quali non giungeranno gli ultimi punti bagnati della faccia interna. Dunque la lamina B soffrirà un eccesso di trazione da dentro in fuori; ed un eccesso di pressione vi sarà sulla faccia interna della tavoletta A; quindi per l'azione del liquido le due lamine verranno respinte l'una dall'altra.

Analoghi effetti si ottengono dai solidi galleggianti sui liquidi. Siano due globetti di sughero (*fig.* 125) galleggianti sull'acqua, che bagnandoli si eleva intorno ad essi. Avvicinando uno dei globetti all'altro in modo che il loro intervallo renda sensibili gli effetti capillari, essi si precipiteranno ad un mutuo incontro e resteranno così aderenti che tirando uno di essi l'altro lo seguirà. Similmente avviene per due palline di cera sull'acqua o di ferro sul mercurio (*fig.* 126), quando siano talmente avvicinate che in mezzo ad esse il liquido abbia un livello più basso dell'esterno; allora l'eccesso della pressione da fuori in dentro spingerà le palline l'una contro l'altra. In fine, è facile comprendere perchè due palline, l'una di cera e l'altra di sughero (*fig.* 124) galleggianti sull'acqua, sembreranno ripellersi quando vengono avvicinate al segno da rendere efficaci le cagioni capillari.

101. L'elevazione dei liquidi per effetto delle azioni capillari si può riprodurre sotto una forma che costituisce una novella pruova del principio di egual pressione. Al fondo di un bicchiere si faccia un foro, e col mastice vi si fermi un sottilissimo tubo capillare (*fig.* 116. *a*). S'immerga il bicchiere nell'acqua col suo orifizio in basso, e si affondi finchè non si vegga il liquido salire nel tubo capillare all'altezza che gli compete. Indi si ritiri dolcemente il bicchiere dall'acqua fino al punto di rimanervi tuttavia del liquido nel tubo capillare; ed in questo movimento osserveremo che l'acqua, quantunque assai elevata sul livello esterno, purtuttavia non abbandonerà l'interno del bicchiere. In conseguenza quella forza di aspirazione che immergendo il solo tubo

avrebbe tenuta sospesa la piccola quantità di acqua che in esso si poteva contenere, ora ne sostiene una massa centinaia di volte più grande, perchè la sua azione si ripete egualmente sopra ogni sezione del liquido eguale in estensione a quella del tubo.

CAPO TERZO.

Equilibrio dei gas.

Barometro — Legge di Mariotte — Equilibrio di una colonna atmosferica — Misura delle altezze mediante le osservazioni barometriche — Legge della mescolanza dei gas — Perdita di peso di un corpo immerso in un gas.

102. Un fluido sottile circonda pertutto il nostro globo, e questo fluido è l'aria atmosferica. La sua materialità non poteva essere ignota ai filosofi antichi, come quella che risulta immediatamente dalla sua coercibilità e dalla resistenza ch'essa oppone ai movimenti dei corpi: ma il suo peso che non può appalesarsi al senso, perchè viviamo in mezzo all'aria, richiedeva un artifizio speciale per esser conosciuto. Non potendo pesar l'aria nell'aria, l'unico spediente che poteva escogitarsi prima di conoscere la macchina pneumatica era quello di comprimere il fluido in un recipiente, affinchè avendo ad eguale volume col fluido ambiente una somma maggiore di molecole, potesse così vincere la sua resistenza, e cadere come la pietra nell'aria, il ferro nell'acqua. Aristotile nell'antichità e Galileo nei tempi moderni attuarono questo progetto: il primo conobbe che un otre pesa più gonfiato che vòto; ed il secondo pesando una bottiglia aperta all'aria ambiente, indi dopo avervi addensato questo fluido il meglio che poteva, rinvenne il secondo peso maggiore del primo.

Conseguenza immediata di questo fatto era che l'ascensione dell'acqua nelle trombe aspiranti fosse prodotta dalla pressione atmosferica. Intanto nè la scuola aristotelica nè Galileo conobbero la dipendenza dei due fatti; e la prima si contentò di dedurre dal fenomeno dell'ascensione dell'acqua nelle trombe aspiranti il principio dell'orrore della natura pel vòto, anzichè proporre viceversa un principio che valesse a dichiarare il fatto. I fisici

che attribuiscono l'esatta spiegazione del fenomeno di ascensione nelle trombe aspiranti alla scoverta del peso dell'aria, hanno contro essi la storia e la logica: la prima, perchè dichiara la scoverta del peso dell'aria anteriore all'altra, la seconda in quanto che sdegna di negare a sommi ingegni, quali furono Aristotile, Galileo, Pascal, quella penetrazione di mente necessaria ad intendere una relazione dei due fatti, che oggi si comprende da ogni scolarello.

Torricelli, a cui si deve l'esatta spiegazione dell'innalzamento dell'acqua nelle trombe aspiranti, non ha scoverto il peso dell'aria, ma ha veduto in tutta la sua estensione una legge idrostatica, che nessun fisico prima di lui aveva chiaramente compreso. Il teorema di Archimede sui galleggianti conteneva il germe di tutte le leggi idrostatiche; ma queste leggi fino a Stevin, Pascal e Torricelli furono talvolta semplicemente indovinate, ma giammai vedute nella loro relazione al principio donde movevano: osserviamo che Lucrezio due secoli dopo di Archimede spiegava l'elevarsi della fiamma in seno dell'atmosfera, come potrebbe farlo un fisico dei giorni nostri. Ed anche dopo che l'Idrostatica era divenuta una scienza, il principio di egual pressione, che genera in un fluido delle spinte verticali per effetto della sola gravità molecolare, non era veduto in tutto il suo lume, giacchè la sua immediata conseguenza, vale a dire la legge di pressione sul fondo dei recipienti in ragione della base e dell'altezza, era denominata *paradosso idrostatico*, quando per la forma del vase bisognava considerare le spinte verticali prodotte dal peso stesso del fluido. Or la mancanza dell'idea di queste spinte verticali, che nei fluidi avvengono per solo effetto della loro gravità, nascondeva la relazione che passa tra il peso dell'aria e l'ascensione dell'acqua nelle trombe aspiranti, vale a dire tra una forza premente dall'alto in basso e la spinta verticale che deve risultarne nella massa liquida, e dalla quale essa viene elevata superiormente al livello esterno. Nella veduta di questa relazione consiste la scoverta di Torricelli, il quale dal considerare che l'acqua si eleva

tutto al più a 32 piedi [1] nelle trombe aspiranti conchiuse che se l'innalzamento era effetto di una pressione esterna, un liquido diverso dall'acqua avrebbe dovuto elevarsi ad un'altezza di tanto minore per quanto la sua densità era più grande; quindi il mercurio, 13 volte più denso dell'acqua, deve innalzarsi ad un'altezza 13 volte minore di 32 piedi, vale a dire a 28 pollici circa. Allora Torricelli prese un tubo di vetro lungo una trentina di pollici e chiuso da un estremo, lo empì di mercurio e chiuso con un dito l'orifizio del tubo lo rivolse in un bagno dello stesso metallo (*fig.* 129): la colonna mercuriale restò alta 28 pollici circa sul livello esterno, e così la relazione tra il peso dell'aria e l'innalzamento dell'acqua nei corpi di tromba, traveduta dapprima da Torricelli, divenne una verità di fatto.

La nuova della scoverta italiana pervenne bentosto in Francia, e Pascal imaginò novello esperimento per confermarne la realtà. Egli fece trasportare il tubo torricelliano sul Puy-de-Dôme, ed il livello del mercurio in esso scendeva, come il punto di osservazione diveniva più elevato, vale a dire come diminuiva il peso della colonna sovrastante.

Avendo conosciuto che la pressione atmosferica sul livello ordinario del suolo equivale al peso di una colonna di mercurio di egual base ed alta 28 pollici, riuscì facile ai fisici il calcolare la somma delle pressioni che il corpo umano riceve dall'aria ambiente. La superficie di esso corpo presenta nel suo valore medio un'estensione di circa 15 piedi quadrati; ed una massa di mercurio di eguale base ed alta 28 pollici pesando oltre a 40000 libbre, in questo numero si è trovato un valore approssimato dalla pressione che l'atmosfera esercita sul nostro corpo [2].

[1] La scoverta di Torricelli ebbe per motivo un esperimento eseguito da taluni fontanieri fiorentini, i quali avendo costruito delle trombe per innalzare l'acqua ad una grande altezza, si avvidero che il liquido si arrestava a 32 piedi sul livello esterno, senza poterlo elevare di più. Or l'orrore della natura pel vôto non si poteva altrimenti considerare che come indefinito; quindi l'esperimento dei fontanieri fiorentini, mentre gli assegnava un limite, ne dimostrava impossibile l'esistenza ed invitava così il pensiero del fisico a novelle indagini.

[2] Taluni fisiologi, non avendo un'idea abbastanza chiara di ciò che il

103. Il tubo torricelliano ha ricevuto il nome di *barometro* ossia *misuratore del peso*, perchè indica il valore della pressione atmosferica. All'epoca di questa celebre scoverta (1643) il termometro, ch'esisteva da meno di mezzo secolo, eccitava tuttavia quell'entusiasmo di novità che invita all'osservazione anche coloro che benpoco ne intendono. La stessa curiosità venne ad essere eccitata dal barometro, ed i fisici acquistarono il gusto delle osservazioni periodiche, che fino a quel tempo erano proprie della sola astronomia. Le ricerche, cui invitava l'apparecchio torricelliano, fecero bentosto conoscere la necessità di averlo continuamente in azione, e poterlo facilmente trasportare da un luogo ad un altro, poichè l'altezza della colonna mercuriale si mostrava varia non solo secondo la distanza verticale del luogo dal livello del mare, ma eziandio essa variava nello stesso luogo secondo lo stato dell'atmosfera. Per soddisfare a questo doppio scopo non che

fisico intende sotto il nome di *pressione di un fluido*, hanno supposto che le 40000 libbre dovessero rappresentare il peso di una colonna sostenuta continuamente dalla testa e dagli omeri, quando il corpo è eretto, ed in generale dalla parte superiore della sua superficie in qualunque posizione esso si trovi. Bastava enunciare in tal modo il fatto della pressione atmosferica sul nostro corpo, per doverla immediatamente negare come impossibile ad essere sostenuta. Per acquistare una chiara idea di questa pressione, basta ripetere nel seguente modo l'esperimento di Torricelli: dopo aver empito di mercurio un tubo lungo 28 pollici, se ne chiuda l'orifizio colla palma della mano e con essa si sostenga dopo averne voltata in su l'estremità chiusa; ed allora vedremo di non avere a sopportare una pressione molto grande. Or immaginiamo sulla superficie del nostro corpo altrettante colonne simili di mercurio, per quante aree vi si contengono eguali all'orifizio del tubo, e che tutte queste colonne siano normali a quella porzione di superficie su cui vengono applicate; in conseguenza talune di queste colonne ci premeranno dall'alto in basso, altre dal basso in alto, alcune da destra a sinistra, altre in opposta direzione ec. Nella somma di tutte queste pressioni stanno le 40000 libbre di pressione atmosferica che noi sopportiamo. La quale se non l'avvertiamo, ciò dipende dall'averla tollerata fin dal primo concepimento: nell'utero di nostra madre noi soffrivamo la pressione dell'atmosfera. Ed al pari di tutte le impressioni abituali, noi non possiamo avvertirne che l'assenza: ponendo un dito sul meato della macchina pneumatica, basteranno pochi colpi di stantuffo per farci avvertire gli effetti della pressione atmosferica.

all'altro di rendere più sensibili le sue variazioni, si sono inventate diverse forme di barometro, di cui andiamo a descrivere le più usitate.

Le varie specie di questo strumento si possono ridurre a due classi, *barometro a pozzetto* e *barometro a sifone*. L'apparecchio torricelliano e tutte le diverse forme di barometro che consistono in un tubo il quale pesca col suo orifizio in una vaschetta di mercurio, appartengono alla classe dei barometri a pozzetto. Al contrario i barometri che sono formati da un tubo ricurvo a braccia diseguali, di cui è aperto il braccio più corto, costituiscono la classe dei barometri a sifone (*fig.* 134).

Qualunque sia la forma, che si voglia dare al barometro, è necessario che siano soddisfatte talune condizioni indispensabili all'esattezza e quindi alla comparabilità dall'istrumento. È necessario in primo luogo adoperare mercurio puro da ogni sostanza estranea che vi potrebbe esser disciolta, affinchè la sua densità sia funzione della sola temperatura. Aggiungiamo inoltre che ripetendo l'esperienza di Torricelli è facile osservare che alla colonna mercuriale restano aderenti delle bollicine di aria, le quali a poco a poco svolgendosi dalla massa, verrebbero per la loro leggerezza a situarsi nella parte superiore del tubo, ed allora l'altezza della colonna barometrica non misurerebbe che la differenza tra la pressione esterna e quella prodotta dall' aria chiusa nella parte superore del tubo. Dicasi altrettanto del vapore svolto da quel leggiero velo di umido che suol trovarsi aderente alla superficie del vetro. Per liberare il mercurio da queste bollicine di aria e vapore, bisogna farlo bollire nel tubo barometrico tenendo l'orifizio in alto, affinchè l'elevata temperatura della sua ebollizione espella ogni atomo di aria e di vapore. Ed è facil cosa conoscere se un barometro già costruito sia ben purgato di aria: basta rivolgerlo lentamente, finchè l'estremità della colonna urti il fondo del tubo. Se l'urto è accompagnato da un colpo secco, allora non vi è aria rinchiusa nè vapore, in contrario il colpo sarà quale avrebbe potuto essere sopra un corpo soffice.

Una delle migliori costruzioni di barometro a pozzetto è quel-

la di Fortin. Il pozzetto di questo barometro consiste in un cilindro di cristallo *a* (*fig.* 138) fermato ad un recipiente di legno, il cui fondo è chiuso da una pelle flessibile chè la vite *v* può elevare od abbassare. Il tubo, la cui estremità acuminata pesca nel mercurio del pozzetto, è chiuso in una canna metallica, che sopra una delle due fenditure longitudinali porta segnata la scala in millimetri; e lo zero di essa corrisponde alla punta *z* di uno stiletto di avorio fermato al piano che superiormente chiude il cilindro di cristallo. In conseguenza volendo determinare l'altezza della colonna barometrica, è d'uopo primieramente osservare se il livello del mercurio nel pozzetto tocca la punta *z*, ciò che facilmente si rileva guardando nel tempo stesso lo stiletto e la sua immagine riflessa dal mercurio. Nel caso che il contatto non avesse luogo, o che la punta fosse immersa nel liquido, allora mediante la vite *v* si farà variare il livello del mercurio, finchè la condizione richiesta sia soddisfatta. Ridotto così il livello esterno del mercurio allo stesso piano orizzontale che contiene l'origine delle divisioni, l'altezza della colonna barometrica sarà determinata dalla divisione a cui corrisponde l'estremità superiore della colonna mercuriale, la quale essendo terminata da una superficie convessa, la sua altezza sarà definita dal piano tangente al punto culminante della curvatura. Perchè non avvenga errore di parallasse nel leggere quest'altezza sulla scala, la canna porta un anello mobile *e*, il quale ha due fenditure longitudinali terminate superiormente da un medesimo piano normale all'anello: questo si farà scorrere sulla canna, finchè il piano degli orli superiori delle fenditure si vegga tangente alla sommità della superficie convessa; e poichè allo stesso piano degli orli corrisponde lo zero del nonio annesso al medesimo anello, così la lettura dell'altezza barometrica riesce allora facilissima. I barometri a pozzetto che il sig. Ernst costruisce a Parigi, sono oggi i migliori strumenti di questa specie.

La *fig.* 134 rappresenta il barometro a sifone modificato da Gay-Lussac, per facilitarne il trasporto ai viaggiatori. L'apparecchio è formato da due tubi *a* e *b* dello stesso diametro interno, uniti

dal tubo capillare *c*. Sul braccio *a* si trova un forellino *m* per dare accesso all'aria che deve premere sul mercurio che vi è contenuto. Il sifone è chiuso in una canna metallica, su cui sono mobili due anelli, l'uno superiore e l'altro inferiore, destinati a misurare le altezze delle due colonne mercuriali, nella cui differenza consiste il valore della pressione atmosferica. Quando si vuol trasportare questo barometro, si capovolge dolcemente, finchè prenda la posizione indicata dalla *fig.* 135: il mercurio verrà così tutto rinchiuso nel braccio lungo del sifone, ed il tubo capillare che lo termina, osterà alle oscillazioni del liquido e quindi alla rottura del sifone, che potrebbero essere cagionate dalle scosse del trasporto.

Poichè nel rivolgere frequente del tubo, qualche bollicina di aria potrebbe passare dal braccio *a* in *b*, e falsificare in conseguenza le indicazioni del barometro; Bunten ha prevenuto la possibilità di questo difetto, modificando l'unione delle due braccia del sifone, come si osserva nella *fig.* 136 Il tubo capillare, che stabilisce la comunicazione delle due braccia, presenta verso la metà della sua lunghezza un'espansione *k*, in cui la parte superiore del detto tubo finisce con una punta *c*, e che poi restringendosi riproduce la porzione inferiore *d* del medesimo tubo. Per questa costruzione avviene che le bollicine di aria penetrando nel tubo capillare, non potranno ascendere all'estremità superiore del barometro, ma resteranno fermate nello spazio *e*, ove non potranno influire sull'altezza della colonna barometrica.

Il barometro a quadrante di Jecker è un'altra modificazione del barometro a sifone. L'apparecchio intero è rappresentato dalla *fig.* 131, e nell'interno suo sta il meccanismo disegnato nella *fig.* 133. Nel braccio corto *a* di un tubo a sifone pieno di mercurio sta un piccolo galleggiante di ferro, unito ad un'asta sottile *b* dello stesso metallo. Questa con un lato dentato ingrana col rocchetto *c*, il quale porta l'indice *i* mobile sulla circonferenza di un cerchio diviso in parti eguali. Quando la pressione atmosferica aumenta, il mercurio discende nel braccio corto del sifone, e con esso il galleggiante; quindi l'asta *b* scendendo muo-

ve il rocchetto e l'indice annesso da destra a sinistra: un opposto movimento ha luogo, se la pressione dell'aria decresce. L'utilità del quadrante consiste nell'aumentare l'estensione dei cangiamenti di livello, già poco sensibili in un barometro a sifone [1]; ed in vero se il galleggiante discende di 1 millimetro, il rocchetto si moverà per un arco di eguale lunghezza, ma l'indice descriverà un arco tante volte più grande, per quante volte il raggio del quadrante contiene quello del rocchetto.

La *fig.* 132 rappresenta lo stesso barometro modificato nella forma esteriore, e quindi nel modo di sospensione, affinchè possa servire agli usi della marina, la quale richiede che il barometro conservi il suo livello ad onta degli urti che riceve dal movimento del naviglio.

104. Le osservazioni barometriche per divenire comparabili debbono essere corrette delle variazioni di temperatura e di latitudine, e dell'influenza della capillarità.

Il calore dilatando il mercurio, lo rende più leggiero; quindi per un dato valore della pressione atmosferica la colonna di mercurio nell'interno del barometro avrà un'altezza crescente colla temperatura. In conseguenza per comparare le altezze barometriche osservate in tempi diversi, fa d'uopo ridurle ad una temperatura che per convenzione sia riguardata come normale: questa temperatura è lo zero della scala termometrica. Or chiamando α il coefficiente $\frac{1}{5550}$ della dilatazione cubica del mercurio tra 0° e 100°, una massa di questo liquido che avesse alla temperatura 0° il volume 1, alla temperatura $t°$ avrebbe il volume $1 + \alpha t$. Ma le altezze barometriche per una stessa pressione dell'aria sono in ragione inversa della densità del mercurio, ossia

[1] Se in un barometro a sifone il mercurio discende di 1 millimetro nel braccio lungo, di altrettanto salirà nell'altro, se le due braccia sono dello stesso diametro interno; perciò la differenza di altezza delle due colonne di mercurio, ed in conseguenza la pressione atmosferica, sarà diminuita di 2 millimetri. Laonde è necessario duplicare le variazioni di livello che osserviamo in un braccio del barometro a sifone, per avere le corrispondenti variazioni nel peso dell'aria.

nella ragione diretta dei volumi; perciò chiamando n il numero di millimetri che occupa l'altezza della colonna mercuriale alla temperatura t°, ed x la corrispondente altezza alla temperatura 0°, avremo la proporzione

$$1 + \alpha t : 1 = n : x$$

donde
$$x = \frac{n}{1 + \alpha t}.$$

A questo valore bisogna fare un'altra correzione relativamente alla contrazione lineare che sarebbe avvenuta nella sostanza, di cui è fatta la scala, passando da t° a 0°. Chiamando β il suo coefficiente di dilatazione lineare, la contrazione sarebbe stata nel rapporto di $1 + \beta t$: 1; e nello stesso rapporto sarebbe aumentato il numero n divisioni contenuto nella stessa lunghezza: per ciò l'esatto valore dell'altezza barometrica alla temperatura 0° sarà $\frac{n(1 + \beta t)}{1 + \alpha t}$.

Per dimostrare con un esempio la necessità della correzione relativa alla temperatura supponiamo che in due tempi diversi il barometro abbia presentato l'altezza $0^{m},743$ alla temperatura 10°, e l'altezza $0^{m},745$ alla temperatura 28°. Supponendo la scala di ottone, il cui coefficiente $\alpha = 0,0000187$, la formola precedente ridurrà la prima altezza a $0^{m},7415$ e la seconda a $0^{m},7412$: così l'altezza che appariva più grande, in conseguenza della correzione di temperatura si è trovata minore dell'altra.

Essendo la gravità crescente dall'equatore ai poli (n.° 40), una medesima altezza barometrica rappresenterà un valore della pressione atmosferica diverso secondo la latitudine del luogo di osservazione. Se riguardiamo come normale il valore g della forza di gravità alla latitudine 45°, la stessa forza alla latitudine λ sarà $g\,(1 - 0,0002566 \cos 2\lambda)$. [1] Or chiamando n l'altezza

[1] Abbiamo osservato al n.° 36 essere la forza di gravità $g = \pi_{2}r$; ed al

della colonna di mercurio nel barometro, la sua pressione sull'unità di base sarà ng alla latitudine 45°, ed $ng\,(1 - 0.002566 \cos 2\lambda)$ sotto la latitudine λ; in conseguenza l'altezza osservata n oltre al fattore che rappresenta la correzione della temperatura, dovrà essere moltiplicata ancora per $1 - 0{,}002566 \cos 2\lambda$.

Sappiamo inoltre che la gravità decresce come aumenta il quadrato della distanza dal centro della terra; ed in conseguenza se g rappresenta l'intensità di questa forza a livello del mare la sua energia alla distanza z dallo stesso livello sarà $\frac{gr^2}{(r+z)^2} = g\left(1 - \frac{2z}{r}\right)$, r disegnando il valore del raggio terrestre. E ciò nell'ipotesi che il barometro sia sospeso nell'aria come avviene quando è trasportato in un viaggio aerostatico: ma se il barometro si porta sopra una montagna, allora l'attrazione che questa esercita sul mercurio diminuisce alquanto l'effetto dell'aumentata distanza dal centro della terra, ed il valore della gravità all'altezza z sarà, secondo Poisson, $g\left(1 - \frac{5z}{4r}\right)$. Perciò un'altezza barometrica, che siasi osservata di n millimetri all'altezza z dal livello del mare, su questo livello sarebbe stata $n\left(1 - \frac{\alpha z}{r}\right)$, α indicando 2, ovvero $\frac{5}{4}$ secondo le due ipotesi qui sopra indicate.

n° 40 abbiamo veduto che chiamando l^{o} la lunghezza del pendolo che batte i secondi all'equatore, la corrispondente lunghezza alla latitudine λ sarà $l = l^{o} + D\, sen^2\lambda$; donde $g = \pi^2\,(l^{o} + D\, sen^2\lambda)$. Or discutendo molte lunghezze del pendolo a secondi determinate a diverse latitudini si è trovato

$$g = 9{,}78078 + 0{,}050321\, sen^2\lambda.$$

Dalla Trigonometria sappiamo essere $sen^2\lambda = \frac{1 - \cos 2\lambda}{2}$; il quale valore sostituito nella formola precedente ci dà

$$g = 9{,}80594 - 0{,}02516 \cos 2\lambda = 9{,}80594\ (1 - 0{,}002566 \cos 2\lambda).$$

Donde si rileva che chiamando g il numero 9,80594 che rappresenta la gravità alla latitudine 45°, questa forza alla latitudine λ sarà

$$g\,(1 - 0{,}002566 \cos 2\lambda).$$

Finalmente l'altezza barometrica vuol essere corretta dell'effetto della capillarità, la quale sappiamo che deprime il mercurio in un tubo di vetro. Se il barometro è a sifone e che le due braccia sono dello stesso diametro interno, allora le due superficie convesse esercitando pressioni eguali ed opposte, l'altezza della colonna barometrica sarà indipendente dall'azione capillare, e quindi non avrà bisogno di veruna correzione. Ma in un barometro a pozzetto questa correzione è tanto più importante, per quanto è più stretto il diametro del tubo. Fra le tavole di correzione date da diversi fisici rechiamo quella calcolata da Bouvard nel 1829 secondo le vedute teoretiche di Laplace sui fenomeni capillari.

Diametro del tubo in millimetri	Depressione del mercurio in millimetri.	Diametro del tubo in millimetri.	Depressione del mercurio in millimetri.
2,	4,579	9	0,534
2,5	3,594	10	0,419
3	2,902	11	0,330
3,5	2,415	12	0,260
4	2,053	13	0,204
4,5	1,752	14	0,161
5	1,507	15	0,127
5,5	1,306	16	0,097
6	1,136	17	0,077
6,5	0,995	18	0,060
7	0,877	19	0,047
8	0,684	20	0,036

Riunendo ora in una sola espressione generale tutte le correzioni da farsi all'altezza barometrica, abbiamo che essendo n millimetri l'altezza osservata sotto la temperatura t in un luogo alto z metri sul livello del mare e di cui λ disegna la latitudine, la stessa pressione atmosferica sotto la temperatura 0° a livello del mare, alla latitudine di 45° e corretta della depressione C dovuta alla capillarità del tubo, sarebbe stata

$$n\,\frac{1+\beta t}{1+\alpha t}\;(1-0{,}002566\,\cos 2\lambda)\left(1-\frac{\alpha z}{r}\right)+\mathrm{C}.$$

In tal modo le osservazioni, eseguite con diversi barometri in luoghi e tempi differenti, divengono comparabili tra loro.

105. Se prendiamo un tubo ricurvo, come *abc* (*fig.* 137) a braccia diseguali, chiuso il braccio corto e l'altro aperto, e versiamo del mercurio per l'orifizio *a*, vedremo il liquido fermarsi nelle due braccia ad altezze diseguali per la resistenza che l'espansibilità dell'aria oppone alla spinta verticale del liquido; e vedreme inoltre il mercurio elevarsi nel braccio *b*, ed in conseguenza diminuire il volume dell'aria ivi rinchiusa a misura che il liquido s'innalza nell'altro braccio. Dunque tra il volume di una massa di aria e la quantità di forza, da cui è compressa, esiste una relazione. Per determinarne l'espressione numerica supponiamo che il braccio *b* del tubo sia diviso in parti di eguale capacità, onde poter misurare il volume di aria in esso contenuta, quando pieno di mercurio il gomito *c*, questo volume resti del tutto circoscritto. Ciò fatto, versiamo del mercurio pel braccio *a*, finchè il volume di aria contenuta in *b* si riduca alla metà di quel che era; e misuriamo la differenza di altezza tra le due colonne di mercurio. Se l'aria contenuta nel braccio *b* è perfettamente secca, troveremo questa differenza di livello eguale all'altezza che avrà il barometro nel momento dell'esperienza; e riducendo successivamente lo stesso volume di aria ad un terzo, un quarto ec. troveremo la differenza di livello nelle due braccia del tubo eguale a 2, 3 volte ec. l'altezza barometrica. Or prima di versare il mercurio nel braccio *a*, l'aria contenuta in *b* sopportava il peso di una colonna atmosferica di egual base; ed essa poi si è ridotta ad un volume 2,3,4 ec. volte minore, quando si sono aggiunte 1,2,3, ec. pressioni eguali alla prima, vale a dire quando questa prima pressione si è resa 2,3,4, ec. volte più grande. Dunque il volume di una massa di aria è in ragione inversa del peso da cui è gravata; e poichè i volumi sono in ragione inversa delle densità, così queste saranno nella ragione diretta delle pressioni. Questa relazione costituisce la *legge di Mariotte*.

Sperimentando come sopra si è detto, la legge di Mariotte non può essere verificata che fino a 3, o pure 4 atmosfere tutto al più

poichè a misura che aumenta la lunghezza del tubo, aumenta ancora la pressione sulla curvatura che serve di base alla colonna di mercurio, e quindi la facilità di rompere il tubo. Or la relazione tra il volume di una massa di aria e la pressione cui è sottoposto, è principio di costruzione pel *manometro* con cui si misura la tensione del vapore acqueo nelle macchine messe in azione da questo motore; e quando a richiesta del Governo l'Instituto di Francia nominò una Commissione per determinare le leggi della tensione del vapore, Arago e Dulong che ne facevano parte, cominciarono dal verificare la legge di Mariotte fino a 27 atmosfere. L'apparecchio adoperato dai fisici francesi è rappresentato dalla *fig.* 139.

Tredici tubi di cristallo, ciascuno di 2 metri di lunghezza, di 5^{mm} di diametro ed altrettanta doppiezza furono ordinati in una colonna verticale solidamente fermata ad una lunga trave. Le unioni dei tubi furono eseguite in modo da non lasciare sfuggire benchè minima quantità di mercurio; e perchè i tubi superiori non avessero col loro peso schiacciato quelli ch'erano sottoposti, alla base di ognuno di essi (come si vede nel lato destro della figura) erano ligate due corde, che passando per le gole di due girelle, portavano nei loro estremi due contropesi equivalenti nella somma al peso del tubo: in tal modo la parte inferiore della colonna non sopportava il peso della superiore. Questa colonna comunicava con un vase di ferro fuso pieno di mercurio, fermato sopra una base di fabbrica; e da un altro lato lo stesso vase era in comunicazione con un tubo di cristallo, lungo $1^{m},80$, e simile nelle altre dimensioni ai precedenti. Questo tubo costituiva il manometro; era perciò diviso in parti di eguali capacità, e pieno di aria perfettamente asciutta. Dal fondo superiore dello stesso recipiente partiva un terzo tubo, che riceveva una tromba comprimente ad acqua, la di cui azione mentre comprimeva l'aria nel manometro, innalzava nella colonna dei tubi il mercurio che doveva misurare la quantità di pressione fatta sull'aria. E poichè il suo volume poteva ancora essere determinato dallo svolgimento di calore nell'atto della compressio-

ne, il manometro veniva conservato ad una temperatura costante mediante una corrente di acqua che lo circuiva continuamente per mezzo di un largo cilindro. Finalmente più termometri immersi in vaschette di mercurio, formate da tronchi di tubi dello stesso diametro dei precedenti, e situate lungo la colonna, davano la temperatura del mercurio che s'innalzava nella serie dei tubi. In tal modo la legge di Mariotte è stata verificata fino a 27 atmosfere.

Egualmente esatta si trova questa legge rispetto alle pressioni minori di un'atmosfera. Onde verificarla si prenda un tubo di cristallo, di un diametro sufficiente a rendere insensibile la depressione capillare; si chiuda in un estremo, e si divida in parti di eguali capacità. Si empia questo tubo di mercurio, e privo di aria si capovolga in un cilindro pieno dello stesso liquido: tenendone immersa la maggior parte, vi si faccia entrare un certo volume di aria asciutta, e si regoli la posizione del tubo in modo che il mercurio abbia nell'interno lo stesso livello esterno. Si legga allora il volume dell'aria rinchiusa, la quale per l'eguaglianza di livello tra le due colonne di mercurio si troverà sottoposta a tutta la pressione dell'atmosfera. Indi si elevi il tubo, finchè il mercurio interno s'innalzi sul livello esterno di una quantità eguale $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ ec. dell'altezza barometrica al momento dell'esperienza; ed il volume dell'aria si troverà eguale a $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, 2 ec. di quello che aveva alla prima lettura.

La legge di Mariotte, verificata per l'aria, venne per analogia estesa agli altri gas permanenti. Ma le sperienze di Despretz ed Oersted fecero conoscere che i gas capaci di liquefazione si allontanano dalla legge di Mariotte, come diviene maggiore la pressione, cui vengono sottoposti. Oersted opinava che questa divergenza cominciasse dai valori di pressione prossimi a produrre la liquefazione, mentre Despretz deduceva dalle sue sperienze che i gas si allontanano dalla legge di Mariotte fin dal principio della compressione. A voler meglio rischiarare la qui-

stione il Pouillet ha ripetuto le sperienze con un apparecchio di sua invenzione rappresentato dalla *fig.*140. Si compone di due tubi di cristallo *a* e *b* di 2 metri di lunghezza, divisi in parti di eguali capacità, e solidamente fermati per le loro estremità inferiori al serbatoio *d* di ferro fuso. Un tubo di ferro *f* stabilisce una comunicazione tra *d* ed il recipiente *e* in parte pieno di mercurio e nel resto di olio: in questo liquido penetra lo stantuffo *g* che discende pel movimento della leva *h*. In tal modo i gas chiusi nei tubi ricevevano una pressione crescente, che Pouillet nelle sue sperienze non estese oltre 100 atmosfere. Egli cominciava dal riempire i due tubi di aria, a fine di verificare l'esattezza delle loro divisioni in parti eguali; e poichè prima di essere graduati, le loro estremità superiori erano state assottigliate alla fiamma in modo che rompendo e rifacendo la punta diverse volte, la capacità delle loro divisioni non riceveva sensibile alterazione, così dopo aver sperimentato sull'aria, si rompeva la punta ad uno dei tubi, e vi s'introduceva il gas da sottoporsi all'esperimento.

In tal modo Pouillet ha trovato — 1° che fino a 100 atmosfere l'ossigeno, l'azoto, l'idrogeno, il biossido di azoto e l'ossido di carbone seguono, come l'aria atmosferica, la legge di Mariotte — 2° che il gas solforoso, il gas ammoniacale, l'acido carbonico ed il protossido di azoto presentano una notevole divergenza dalla legge di Mariotte, appena i loro volumi si sono ridotti ad $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ del volume primitivo — 3° che l' idrogeno protocarburato e l'idrogeno bicarburato hanno una compressibilità più grande dell'aria, quantunque alla temperatura di 8° o 10° essi non si liquefacessero sotto la pressione di 100 atmosfere.

Nel quadro seguente si leggono i risultamenti di una tra le serie di sperienze fatte dal Pouillet.

Pressioni.	Volumi teorici.	Acido carbonico.	Protossido di azoto.	Idrogeno protocarburato.	Idrogeno bicarburato
1 atm.	1	1	1	1	1
2	0,5	1	0,996	0,998	0,994
4	0,25	1	0,988	0,995	0,989
5	0.20	0,989	0,983	0,992	0,986
6,67	0,15	0.980	0,971	0,989	0.983
10	0,10	0,965	0,956	0,984	0,972
15,38	0,065	0,934	0,923	0,969	0,962
20	0.050	0.919	0,896	0,956	0,955
25	0,040	0,880	0,849	0,951	0,948
33,3	0,030	0,808	0,787	0,951	0,934
40	0,025	0,739	0,732	0,940	0,919
50	0,020	»	»	0,907	0,899
83	»	»	»	»	0,850

N. B. I numeri contenuti nelle ultime quattro colonne di questo quadro, rappresentano i rapporti tra i volumi osservati e quelli dati dalla teoria, facendo ciascuno di questi ultimi = 1.

106. Se l'esperimento del Puy-de-Dôme suggerì a Pascal l'idea di poter misurare le altezze dei monti per mezzo delle osservazioni barometriche[1], la legge di Mariotte somministrò ai fisici il mezzo di menarla ad effetto. Immaginiamo la colonna di aria AB (*fig.* 130) estesa dal livello del suolo fino al limite

[1] Dopo la scoverta di Torricelli, Pascal invitò suo cognato M. Perier, che dimorava a Clermont, a portare sulla vicina montagna del Puy-de-Dôme il barometro per osservare se l'altezza della colonna mercuriale diminuiva a misura che l'apparecchio si recava più in alto. M. Perrier osservò che il barometro segnava 26 pollici e 3 linee nel giardino dei PP. Minori, situato nel luogo più basso della città, e sulla sommità della montagna non giungeva che a 23 pollici e 2 linee.

Pascal istesso osservò a Parigi che tra il piede e la sommità della torre di *Saint-Jacques-de-la-Boucherie* alta 150 piedi il barometro segnava 2 linee di differenza nell'altezza della colonna di mercurio; ed ebbe poi mezza linea di differenza tra il suolo ed una casa alla quale si saliva per 90 gradini.

In conseguenza di queste osservazioni, nel suo trattato sull'equilibrio dei liquidi egli definisce il metodo delle osservazioni barometriche colle seguenti parole: *ce qui est un moyen assez exact et très-facile de niveler les lieux, quelqu'éloignés qu'ils soient.*

superiore dell'atmosfera, e che da una serie di piani orizzontali equidistanti sia divisa in altrettande falde parallele *ab*, *cd*, *ef*, ec. Chiamiamo p la pressione che la colonna atmosferica esercita sul suolo, e p', p'', p''', ec. le pressioni fatte sulle sezioni *ab*, *cd*, *ef*, ec. Supponendo che in tutta la lunghezza della colonna di aria vi sia una temperatura uniforme, che per comodo di calcolo facciamo eguale a 0°, le densità delle diverse falde saranno proporzionali alle pressioni da cui sono gravate; quindi chiamando d e d' le densità della prima e seconda falda, avremo

$$d : d' = p' : p''.$$

E poichè le falde si suppongono tutte della medesima altezza, ne saranno eguali i volumi, e quindi i pesi saranno proporzionali alle densità. Or il peso della falda *ag* è eguale al peso di tutta *Ag* meno quello di *Ab*, vale a dire eguale a $p - p'$; similmente avremo il peso della falda $cb = p' - p''$; quindi la proporzione

$$p - p' : p' - p'' = d : d'.$$

Eliminando da queste due proporzioni il rapporto comune $d{:}d'$, si ha

$$p - p' : p' - p'' = p' : p'' ;$$

donde $$pp'' = p'^2,$$

e $$p : p' = p' : p''$$

similmente si avrebbe

$$p' : p'' = p'' : p''' = p''' : p^{\text{IV}} = \text{ec.}$$

Dunque nell'ipotesi di una temperatura uniforme ed a distanze dal suolo crescenti in progressione aritmetica, le pressioni atmosferiche e quindi le densità delle corrispondenti falde di aria, formano una progressione geometrica decrescente. In questo teorema dovuto al celebre Halley, sta il principio della mi-

sura delle altezze mediante le osservazioni barometriche. Ed in vero chiamiamo p la pressione atmosferica a livello del mare ed alla temperatura 0°, ed α la distanza verticale a cui bisogna portare il barometro per ottenere la diminuzione di 1 millimetro nell'altezza della colonna di mercurio; avremo che per distanze dal suolo formanti la progressione aritmetica

$$\div\, 0 \,.\, \alpha \,.\, 2\alpha \,.\, 3\alpha \,.\, 4\alpha \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, n\alpha,$$

le pressioni corrispondenti dell'aria, ossia le rispettive altezze barometriche formeranno la progressione geometrica decrescente

$$\because\, p : p' : p'' : p''' : p^{\text{IV}} .\,.\,.\,.\,.\,,$$

ovvero
$$\because\, 1 : \frac{p'}{p} : \frac{p''}{p} : \frac{p'''}{p} : \frac{p^{\text{IV}}}{p} : .\,.\,.\,.$$

Sarà dunque $\frac{p''}{p} = \left(\frac{p'}{p}\right)^2$, $\frac{p'''}{p} = \left(\frac{p'}{p}\right)^3$, ec.; e la progressione delle altezze barometriche diverrà

$$\because\, 1 : \frac{p'}{p} : \left(\frac{p'}{p}\right)^2 : \left(\frac{p'}{p}\right)^3 : \;.\,.\,.\,.\,.\,.\; \left(\frac{p'}{p}\right)^n.$$

Or supponiamo che ad una certa distanza verticale dal livello del mare l'altezza barometrica sia di a millimetri. Se fosse noto il termine della progressione geometrica precedente, eguale al numero a, l'altezza del punto di osservazione sarebbe nota, poichè il suo valore sarebbe dato dal termine corrispondente della progresssione aritmetica delle distanze verticali. Chiamando x l'esponente che la ragione $\frac{p'}{p}$ avrà nel termine eguale ad a,

avremo
$$a = \left(\frac{p'}{p}\right)^x;$$

donde
$$\log.a = x \log.\frac{p'}{p}.$$

Similmente per un altro luogo di osservazione, pel quale si avesse l' altezza barometrica a', si avrebbe l' equazione

$$log.a' = x' \, log. \frac{p'}{p}.$$

Sottraendo la 2ª equazione dalla 1ª si ottiene

$$log a - log a' = (x - x') \, log \frac{p'}{p};$$

donde $x - x' = \frac{log a - log a'}{log p' - log p} = \frac{1}{log p' - log p} \, log \frac{a}{a'}.$

Ora x rappresentando l'esponente che bisogna dare alla ragione $\frac{p'}{p}$, perchè divenga eguale ad a, il suo valore esprimerà l'altezza del punto di osservazione sul livello del mare, riferita ad α come unità. Lo stesso deve dirsi di x'; quindi la differenza $x - x'$ disegnerà la distanza verticale dei due punti di osservazione, la quale chiamando Z e facendo il fattore costante $\frac{1}{log p' - log p} = M$, avremo l'equazione

$$Z = M \, log \frac{a}{a'}. \quad (a)$$

Abbiamo detto che unità di misura di Z è la quantità α che rappresenta la spessezza dello strato di aria che a livello del mare equilibra 1 millimetro di mercurio; in conseguenza per la teorica dei tubi comunicanti a cui appartiene il barometro, la spessezza α dovrà stare ad 1 millimetro, come la densità del mercurio è a quella dell'aria. Questo rapporto si è trovato di 10466,82 : 1 da Biot ed Arago a livello del mare ed alla latitudine 45°, sotto la temperatura 0° e l'altezza barometrica $0^m,76$. È dunque $\alpha = 10^m,46682$, e l'altezza dimandata conterrà tante volte $10^m,46682$ per quante sono le unità di Z. Ciò suppone una latitudine di 45°: ad una diversa latitudine la spessezza di α varierà in ragione inversa della forza di gravità; in conseguenza chiamando λ la latitudine, avremo

$$\alpha = \frac{10^m,46682}{1 - 0,002566 . cos \, 2\lambda} = 10^m,46682(1 + 0,002566 \, cos.2\lambda).$$

Questa prima correzione dunque richiede che il secondo membro dell'equazione (a) si moltiplichi per $1 + 0{,}002566 \cos.2\lambda$.

Abbiamo supposto ancora che la colonna atmosferica avesse in tutta la sua lunghezza una temperatura uniforme, mentre l'osservazione ha dichiarato che la temperatura dell'aria decresce secondo l'altezza. Per ridurre questo fatto all'equivalente di una temperatura uniforme osserviamo che essendo t la temperatura della stazione inferiore e t' quella della stazione superiore, la colonna dell'aria conserverebbe la stessa altezza se in tutta la sua estensione avesse la temperatura media $\frac{t + t'}{2}$. Or se α ha il valore $10^m{,}46682$ alla temperatura $0°$, col grado di calore $\frac{t + t'}{2}$ la forza elastica dell'aria e quindi l'altezza di α sarà aumentata nel rapporto di $1 + \frac{t + t'}{2}\beta : 1$, β disegnando il coefficiente di dilatazione dell'aria, che secondo Regnault è di $0{,}003665$ del volume a $0°$. Ma l'umidità, che sempre più o meno si trova nell'atmosfera, diminuendone il peso [1], rende necessaria una maggiore spessezza di α per equilibrare 1 millimetro di mercurio; quindi è necessario aumentare il valore di β, che faremo eguale a $0{,}004$. Così avremo un nuovo fattore del 2° membro dell'equatore (a) che sarà

$$1 + \frac{t + t'}{2}\,0{,}004 = 1 + \frac{2\,(t + t')}{1000}.$$

Abbiamo fin' ora supposto che la gravità avesse lo stesso valore a qualsivoglia distanza dalla superficie terrestre, mentre sappiamo che ad una distanza z dal livello del mare essa decresce nel rapporto di $1 : 1 - \frac{\alpha z}{r}$. Or la colonna interposta tra i due punti di osservazione ha un'altezza determinata dal peso della colonna sovrastante, che abbiamo fin'ora conside-

[1] Vedremo nella SEZIONE III di questo libro che il vapore acqueo ha una densità minore di quella dell'aria.

rato come prodotto dalla stessa intensione di gravità che ha luogo al livello del mare. Diminuendo il peso di questa colonna sovrastante nel rapporto di $1 : 1 - \frac{\alpha z}{r}$, l'altezza della colonna sottoposta aumenterà viceversa nella stessa ragione, vale a dire che al secondo membro dell'equazione (a) bisogna ancora aggiungere il fattore

$$\frac{1}{1-\frac{\alpha z}{r}} = 1 + \frac{\alpha z}{r}$$

Finalmente osserviamo che il barometro superiore avendo una temperatura più bassa dell'inferiore, è d'uopo ridurre col calcolo le loro indicazioni ad una stessa temperatura, perchè siano comparabili. Chiamiamo T la temperatura del barometro inferiore, T' [1] quella del superiore; questo sarà meno caldo dell'altro di T — T' gradi. Se al barometro superiore si comunicasse questo eccesso di temperatura, la densità del mercurio sarebbe diminuita nel rapporto di $1 + \frac{T-T'}{5550} : 1$; e viceversa sarebbe aumentata l'altezza della colonna barometrica. Dunque la quantità a' dev'essere moltiplicata per $1 + \frac{T-T'}{5550}$. E ciò per la differenza di temperatura. Rispetto poi alla diminuzione della gravità dipendente dalla distanza z dal livello del mare, a' si deve ancora moltiplicare per $1 - \frac{\alpha z}{r}$; vale a dire che la frazione $\frac{a}{a'}$ si deve moltiplicare per

$$\frac{1}{1-\frac{\alpha z}{r}} = 1 + \frac{\alpha z}{r}.$$

[1] Il rapporto $\frac{a}{a'}$ delle due altezze barometriche è indipendente dalla temperatura del mercurio, purchè sia la stessa per tutte due; perciò invece di ridurre ciascuna delle altezze a 0°, è sufficiente alla loro comparabilità ch'esse siano ridotte ad una medesima temperatura, la qual cosa si ottiene sia moltiplicando a' per $1 + \frac{T-T'}{5550}$, sia dividendo a per questo medesimo numero.

Riunendo tutte queste correzioni che debbono farsi al 2° membro dell'equazione (*a*), si ottiene

$$Z = M\,(1 + 0{,}002566.cos2\lambda)\left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right)\left(1+\frac{\alpha z}{r}\right) \; log\left[\frac{a}{a'\left(1+\frac{T-T'}{5550}\right)}\left(1+\frac{\alpha z}{r}\right)\right]$$

Resta a determinarsi il coefficiente M. Rammentandoci che $M = \frac{1}{log p' - log p}$, $p - p' = 1^{mm}$, e che Z ha per unità la spessezza dello strato di aria equivalente in pressione ad 1 millimetro di mercurio; sarà facile comprendere che volendo esprimere Z in metri, M diverrà una funzione del rapporto tra la densità del mercurio e quella dell'aria. Questa funzione è stata determinata per la prima volta da Laplace nella sua *Meccanica Celeste*; ma la sua determinazione non poteva altrimenti ottenersi che mediante i dati, che allora si avevano, poco sodisfacenti sul rapporto della densità del mercurio a quella dell'aria. Così Laplace ottenne M = 17972,1 metri. A di lui richiesta Ramond eseguendo diverse misure barometriche nel mezzogiorno della Francia trovò che per la latitudine di 45° si ha M = 18336 metri; e che volendo trascurare nella formola il fattore $1 + \frac{\alpha z}{r}$, quando z non sia molto grande, bisognerà aumentare alquanto il valore di M, facendolo eguale a metri 18393. Così la formola diviene

$$Z = 18^{m},393\,(1 + 0{,}002566\;cos.2\lambda)\,(1000 + 2\,(t + t')) \; log.\frac{5550.a}{a'\,(5550 + T - T')}$$

Per dare un'applicazione di questa formola, prendiamo un'osservazione barometrica fatta dal Ramond sul picco di Bigorre, mentre un'altra simile ne faceva il Dango nella città di Trabes. Si ottennero i seguenti valori.

Stazione superiore.	*Stazione inferiore.*
$a' = 557^{mm},203$	$a = 735^{mm},581$
$t' = +4^{\circ}$	$t = +19^{\circ},125$
$T' = +9^{\circ},75$	$T = +18^{\circ}625$

La latitudine media delle due stazioni era circa 43°.
Quindi

$$1 + 0{,}002566.\cos 2\lambda = 1 + 0{,}002566.\cos 86^{\circ} = 1{,}00017547,$$

$$1000 + 2(t + t') = 1046{,}25,$$

$$\log \frac{5550.\,a}{a'(550 + T - T')} = \log \frac{5550.\,735{,}581}{557{,}203.\,5558{,}875} = 0{,}135798.$$

Donde

$$\log.\,z = \left\{\begin{aligned} &\log.\,18{,}393 = 1{,}2646526 \\ +\,&\log.\,1{,}00017547 = 0{,}0000762 \\ +\,&\log.\,1046{,}25 = 3{,}0196355 \\ +\,&\log.\,0{,}135798 = \bar{1}{,}1328934 \\ & \overline{3{,}4172577} \end{aligned}\right.$$

Quindi $Z = 2613^{m},7$.

107. Se più liquidi, non avendo tra essi azione chimica, vengono introdotti in un medesimo recipiente, il loro equilibrio stabile richiederà che si dispongano a suoli orizzontali, e che le loro densità facciano una serie decrescente dal basso in alto. Andremmo assai lontani dal vero, se per la sola analogia di fluidità volessimo applicare la stessa legge ai corpi aeriformi. Il Berthollet prese due globi di vetro, muniti di tubi, a cui erano adattate delle chiavi che a piacere dell'osservatore potevano stabilire o intercettare una comunicazione esterna; i due tubi erano poi terminati da vite che permetteva riunirli in un solo tubo. Egli empì un globo di gas acido carbonico e l'altro di gas idrogeno; chiuse le chiavi dei due tubi, e così preparati lasciò i due globi nelle cave dell'osservatorio di Parigi, finchè avessero preso la temperatura uniforme che ivi regna costantemente. Indi nello stesso luogo dispose i globi in modo che quello contenente il gas idrogeno fosse superiore all'altro; congiunse i loro tubi, ed aprì le chiavi, affinchè il gas contenuto in uno dei globi avesse potuto liberamente diffondersi nell'altro. Lasciato così l'apparecchio per qualche tempo, si chiusero le chiavi, si separarono i

tubi, e si analizzò quel che ogni globo conteneva. Si rinvenne che il gas idrogeno e l'acido carbonico si erano egualmente diffusi in tutta la capacità dell'apparecchio, quantunque il primo gas sia oltre a 22 volte meno denso del secondo. L'equilibrio dei due gas, azoto ed ossigeno, componenti l'atmosfera terrestre soddisfa a questa legge di mescolanza scoverta da Berthollet, poichè l'analisi chimica ha trovato tra i due gas un rapporto costante di quantità in qualunque punto della massa atmosferica.

Questa tendenza dei gas a vicendevole compenetrazione non lascia di avere effetto anche attraverso i corpi porosi. Graham empiva di un gas qualunque una campana poggiata sull'acqua o sul mercurio, e che aveva superiormente un foro chiuso da gesso impastato al momento dell'esperienza. Dopo qualche tempo egli cercava con reagenti chimici se la campana contenesse tuttavia il gas che vi aveva introdotto, e non rinveniva altro che aria atmosferica. Questo fatto è una conseguenza della legge di Berthollet; poichè essendo la capacità della campana infinitamente piccola rispetto allo spazio atmosferico, infinitesima doveva essere la quantità del gas che vi doveva restare, dopochè il corpo poroso lo aveva messo in comunicazione coll'aria ambiente.

Ma se il corpo poroso che divide i due gas, non sia permeabile che da un solo di essi, questo allora penetra nello spazio occupato dall'altro e ne aumenta la tensione. Lo stesso Graham pose sotto una campana contenente acido carbonico e poggiata sull'acqua, una vescica piena di aria e leggermente bagnata all'esterno; la vescica cominciò a gonfiarsi, e dopo alcune ore pervenne a tale aumento di volume, che ne fu crepata. L'acido carbonico, la cui solubilità nell'acqua è considerevole, penetrava per la faccia esterna della vessica, e si accumulava in essa fino a prendere la densità del gas lasciato nella campana; mentre l'aria trovando la membrana pressocchè impermeabile, restava nell'interno della vessica, ed aggiungeva la sua tensione a quella del gas che sopravveniva.

La penetrazione dei gas nei liquidi, impropriamente denominata *soluzione*, va sottoposta ad una legge analoga a quelle delle

mescolanze. Dalle sperienze di Henry di Manchester e Dalton si rileva — 1º che le quantità di gas penetrate in un medesimo liquido, sono proporzionali alle pressioni — 2º Che il gas resterà nel liquido, finchè questo è premuto da un'atmosfera dello stesso gas, e con una forza eguale a quella che ne ha determinata la penetrazione. Se la tensione del gas diminuisse, o che ne venisse sostituito un altro, una parte più o meno grande del gas assorbito verrebbe sprigionata: donde si fa chiara la ragione per la quale i gas contenuti nelle acque minerali, si svolgono da esse quando vengono esposte all'aria libera — 3º che la quantità di gas che un liquido può ricevere, è indipendente dalla natura e quantità dei gas che già vi sono penetrati.

Il rapporto del volume del gas a quello del liquido che lo contiene, ha ricevuto il nome di *coefficiente di assorbimento*. Così rispetto all'acqua il coefficiente dell'ossigeno è $\frac{1}{15}$, ed $\frac{1}{30}$ quello dell'azoto: vale a dire che 30 pollici cubi di acqua possono contenere 2 pollici cubi di ossigeno, un pollice cubo di azoto, sotto la pressione di un'atmosfera dello stesso gas. Or 100 parti di aria contengono 21 di ossigeno e 79 di azoto; quindi 0,21 della pressione atmosferica sono dovuti all'ossigeno e 0,79 all'azoto. Perciò i due elementi di una massa di aria sovrastante all'acqua vi penetreranno in ragione composta delle loro quantità, e dei rispettivi coefficienti di assorbimento. Laonde disegnando con 100 un volume di aria assorbito dall'acqua, x la parte di ossigeno, e $100 - x$ quella di azoto, avremo la proporzione

$$x : 100 - x = \frac{21}{15} : \frac{79}{30} = 42 : 79 ,$$

donde

$$x = 34{,}67.$$

Dunque nell'aria assorbita dall'acqua l'ossigeno è all'azoto presso a poco come 34 a 66; rapporto confermato da sperienze dirette.

La stessa teorica permette ancora di risolvere il seguente pro-

blema: *dato il volume* v *di un liquido, ed il volume* w *di un gas solubile sovrastante; dati ancora il coefficiente* c *di assorbimento e la tensione* p *del gas: determinare ciò che diverrà p quando il volume* w *diviene* w'. Poichè nel liquido si contiene il volume vc di gas, possiamo astrarre dal volume del liquido, e considerare il volume dell'intero gas $= w + vc$; or w divenendo w', lo spazio occupato dal gas sarà $w' + vc$, e le tensioni dei gas essendo per la legge di Mariotte nella ragione inversa dei volumi, avremo chiamando x la tensione incognita,

$$x : p = w' + vc : w + vc,$$

quindi .
$$x = p\,\frac{w' + vc}{w + vc}.$$

108. Abbiamo veduto nel capo 1° di questa sezione che il principio di egual pressione è una conseguenza immediata della somma mobilità molecolare dei liquidi, e che da esso principio come corollario deriva il teorema di Archimede sui galleggianti. Or nei fluidi aeriformi la mobilità molecolare è senza dubbio maggiore che nei liquidi, in conseguenza la stessa eguaglianza di pressione e lo stesso teorema di Archimede vi dovranno aver luogo. Perciò un corpo immerso in un gas deve perdere una quantità di peso eguale a quello del fluido aeriforme discacciato.

Con accurate sperienze Biot ed Arago hanno trovato che un litro di aria alla temperatura 0°, a livello del mare, alla latitudine di 45° e sotto la pressione barometrica $0^{m},76$ pesa $1^{g},2991$. Quindi pesando nell'aria un corpo, il cui volume sia v litri, t la temperatura dell'aria, a l'altezza barometrica al momento della pesata, λ la latitudine del luogo e z la sua distanza dal livello del mare; avremo che la perdita π di peso fatta dal corpo nell'aria, di cui chiamiamo β il coefficiente di dilatazione, sarà data dall'equazione

$$\pi = 1^{g},2991 . v \frac{a}{0^{m},76} \cdot \frac{1}{1+\beta t}\left(1 - \frac{\alpha z}{r}\right)(1 - 0,002566\, \cos.2.\gamma).$$ [1]

[1] Potrebbe sembrare a prima vista che il valore $1^{g},2991$ rappresentando

109. È così piccola la compressibilità dei liquidi, che eccetto il caso di enormi pressioni noi possiamo senza errore sensibile riguardarli come incompressibili. Donde viene che la loro densità, supponendo una temperatura uniforme, è costante in tutta l'estensione della massa; e perciò se il solido che vi s'immerge non eguaglia in un punto qualunque la densità del liquido ambiente, non l'eguaglierà in nessun altro punto della massa fluida, ed in conseguenza o dovrà toccare il fondo del recipiente, o salire a galla sulla superficie di livello. Ma l'aria che per soddisfare alla legge di Mariotte deve presentare una densità continuamente decrescente dalle infime alle supreme regioni dell'atmosfera, può ammettere che un corpo si elèvi dal suolo, perchè più leggiero dello strato fluido che lo circonda, e resti poi in equilibrio ad un'altezza che rende la densità dell'aria eguale a quella del galleggiante. Osserviamo inoltre che per una data altezza la densità dello strato atmosferico dipende ancora dal grado di temperatura, la quale secondochè nelle sue variazioni altera più rapidamente la densità del galleggiante o dell'aria che lo circonda, potrà menare il corpo nuotante in seno dell'atmosfera

un peso, non avesse ad esser corretto dell'influenza della latitudine e dell'altezza sul livello del mare; poichè quell'alterazione che la gravità del litro di aria riceve da queste due condizioni, la ricevono egualmente i pesi destinati ad equilibrarne l'effetto. Così una bilancia che nel vôto pneumatico tenesse in equilibrio due masse a livello del mare e sotto la latitudine 45°, le terrebbe ancora in equilibrio a qualunque altezza e sotto qualsivoglia latitudine. Ma la continua ripulsione molecolare delle masse aeriformi fa sì che i loro volumi inversamente, e le loro densità direttamente dipendano dalla pressione, cui sono sottoposte. E poichè quella pressione che a livello del mare ed alla latitudine 45° è misurata da $0^m,76$ di mercurio, diviene poi $0^m,76 \left(1 - \frac{\sigma z}{r}\right)(1 - 0,002566 \cos. 2\lambda)$ all'altezza z dal livello del mare ed alla latitudine λ; così secondo la medesima ragione deve ancora variarne la densità, e quindi il peso.

N. B. — La formola di correzione data nel testo manca di un elemento dipendente dallo stato igrometrico dell'atmosfera, e che a suo luogo dichiareremo.

ad una distanza più o meno grande dalla superficie terrestre. Così vediamo la nebbia toccare di buon mattino il suolo di una contrada paludosa, nelle ore meridiane elevarsi sotto forma di nube, e ricadere al suolo col crepuscolo della sera.

La costruzione dei palloni aerostatici non è che un'attuazione di questi principî. Essa fu menata ad effetto da Montgolfier nel 1782; e giammai scoverta veruna eccitò tanto entusiasmo, e fè concepire sì grandi speranze. Dapprima non furono che un sacco di tela foderata di carta, ebbero in seguito una forma sferoidale, quando conosciuta la quantità della loro forza ascensionale, si conobbe la possibilità di farli servire ai viaggi per le inesplorate regioni dell'atmosfera. Pilatre des Rosiers fu il primo areonauta; e non tardò guari ad esserne la prima vittima.

I palloni alla Montgolfier, quali li vediamo nelle feste popolari, ascendono per la rarefazione dell'aria interna, prodotta dall'azione di una fiamma. Oltre al pericolo che l'areonauta correrebbe pel fuoco che da un momento all'altro potrebbe distruggere il pallone, questo non può molto elevarsi, poichè le correnti che si stabiliscono alla bocca del pallone non permettono di elevar molto la temperatura e quindi la rarefazione dell'aria interna. Charles sostituì il gas idrogeno all'aria rarefatta, ed il taffettà gommato alla carta: in tal modo il pallone divenne più resistente, ed accrebbe la sua forza ascensionale, essendo il gas idrogeno intorno a 15 volte più leggiero dell'aria. Se i *mongolfieri* salivano per la rarefazione dell'aria, bastava che l'areonauta avesse moderato continuamente l'intensità della fiamma, fine ad estinguerla del tutto, perchè il pallone discendendo avesse toccato la terra di bel nuovo. Ma i palloni a gas idrogeno una volta saliti alla loro massima altezza, non vi sarebbe mezzo di farli discendere se non fossero muniti di una valvoletta, che l'areonauta può a suo piacere aprire, perchè parte del gas idrogeno fosse sostituita dall'aria atmosferica, la quale a misura che entra fa scendere il pallone rendendolo più pesante.

Suole al pallone aggiungersi un *paracaduta*, la cui prima idea viene attribuita al celebre areonauta Blanchard. Il *paracaduta* è

una specie di grande ombrella, alla cui circonferenza è sospeso un grosso paniere di vimini, in cui si adagia l'areonauta (*fig.* 141). Finchè il *paracaduta* è congiunto al pallone, conserva la forma di un ombrello chiuso; ma se ne venisse separato, la resistenza dell'aria lo aprirebbe, e svolto così in una grande superficie, lentamente scenderebbe verso la terra (*fig.* 142). Nel 1802 Garnerin diede a Londra lo spettacolo di un coraggio eminentemente straordinario: egli salì a prodigiosa altezza con un pallone aerostatico, ivi tagliò la corda che univa il pallone al *paracaduta*, e col solo aiuto di questo discese a terra. Così l'esperienza più audace non mancò di felice successo.

CAPO QUARTO.

Descrizione della macchina pneumatica, e delle principali sperienze con essa eseguite — Descrizione di taluni apparecchi i cui effetti dipendono dalla pressione atmosferica.

110. Ottone di Guerrick, borgomastro di Magdeburg, inventò la macchina pneumatica nel 1650. Perfezionata successivamente da Boyle, Hawksbée, e Babinet, oggi si costruisce come viene rappresentata dalla *fig.* 147. Una campana A di cristallo che forma il *recipiente* della macchina, poggia sopra un piano di vetro BC; nel cui centro *o* prende origine un condotto, che poi si divide in due, e mette così il recipiente A in comunicazione coi corpi di tromba M ed N, ossia con due cilindri di ottone, o meglio di cristallo, perfettamente calibrati nell'interno. Una leva *lg* fermata alla ruota dentata *z*, comunica a questa un moto alternato, che poi si trasfonde nei due stantuffi *p* e *q*. Per dichiarare il modo con cui l'aria viene aspirata dal recipiente, consideriamo la costruzione di uno di questi stantuffi, e sia *q*. Il corpo dello stantuffo è lateralmente traversato da un bastoncino metallico *ts*, terminato in basso da un tronco di cono che chiude esattamente l'orifizio del tubo di comunicazione, e verso l'estremità superiore presenta un rilievo *v*, che arresta il movimento

di ts, quando lo stantuffo sale. Allorchè poi questo discende, il cono s chiude l'orifizio del condotto, dal quale si è per poco allontanato nella salita dello stantuffo; quindi l'aria viene ad essere compressa tra la base dello stantuffo, ed il fondo della camera di tromba, e per questa compressione alza la valvola x, ed esce fuori. Risalendo lo stantuffo, nuov'aria accorre dal recipiente, per essere poi nello stesso modo estratta dalla camera della tromba. Quando uno degli stantuffi discende l'altro sale, e perciò di quanto la pressione esterna dell'atmosfera osta al movimento del secondo, di altrettanto facilita la discesa del primo: ecco il vantaggio della doppia tromba. Prima di Hawksbée le macchine pneumatiche avevano un sol corpo di tromba, e l'esperimento diveniva laborioso a misura che il vôto progrediva.

Per valutare il grado di rarefazione la macchina è provveduta di un *provino*. È questo una specie di barometro a sifone a braccia eguali, ed alto una diecina di pollici (*fig.* 144). Il braccio chiuso è interamente pieno di mercurio, che vi resta sospeso per la pressione dell'aria. Questo tubo è fermato ad una tavoletta divisa in millimetri, e coverto dalla campana k (*fig.* 147) sostenuta da una base di ottone, per mezzo della quale lo spazio chiuso dalla campana è messo in comunicazione col recipiente e colle camere di tromba. Così a misura che la rarefazione dell'aria progredisce, manca la pressione nel braccio aperto del provino, ed il mercurio discende nell'altro braccio; ma non potrà mai segnare in esse un medesimo livello, poichè il vôto non è possibile di averlo perfetto.

Le migliori macchine davano il vôto a circa 2 millimetri di pressione, prima che un ingegnoso meccanismo inventato dal Babinet non avesse offerto il mezzo di spingere più innanzi la rarefazione dell'aria. Nel luogo, ove il condotto di comunicazione tra il recipiente e le trombe si divide in due, avvi una chiave conica (*fig.* 148) la quale è traversata da tre canali, uno, secondo l'asse z del cono, e che sta in continua comunicazione col recipiente; gli altri due c e c' ad angoli retti

tra loro, sono ancora perpendicolari al primo. Quando la chiave è nella posizione rappresentata dalla *fig.* 148, la macchina agisce nel modo consueto; il canale c' forma parte del condotto di comunicazione, e c resta chiuso. In questo stato dell'apparecchio supponiamo che il vôto siasi fatto fino a rendere stazionario il mercurio nel provino, vale a fino al punto di rarefare l'aria a segno che anche compressa dagli stantuffi non ha tensione sufficiente a sollevare le valvole. Allora si giri la chiave di un mezzo giro a dritta, come indica la *fig.* 149; il recipiente non comunicherà più colla tromba B, ma soltanto con A; ed il canaletto *zmn*, che nella prima posizione della chiave rimaneva chiuso, ora fa comunicare direttamente le due camere di tromba A e B. Mettendo allora la macchina in azione, l'aspirazione fatta nella camera A, vi chiama l'aria dal recipiente; e poichè essa è così rara che nella discesa dallo stantuffo non ha forza di sollevarne la valvola, così pel canaletto *zmn* verrà nella camera B, dalla quale sarebbe di beluuovo aspirata in A, coll'innalzarsi della valvola s', se la valvola s non ne chiudesse immediatamente la strada. In conseguenza prolungando l'azione degli stantuffi l'aria residua passerà dal recipiente nella camera A e da questa in B, nella quale sempre più addensandosi perverrà finalmente ad acquistare la tensione necessaria per innalzare la valvola dello stantuffo, ed uscir fuori.

111. La macchina pneumatica è un apparecchio indispensabile ogni volta che si vuol conoscere l'influenza dell'aria sulla produzione dei fenomeni che avvengono nel seno dell'atmosfera. Abbiamo avuto fin'ora diverse occasioni di citarne i risultamenti; altre ne avremo in seguito. Intanto descriveremo talune sperienze che serviranno a meglio dichiarare gli effetti meccanici della pressione atmosferica.

— 1. La *fig.* 146 rappresenta due emisferi di ottone, che combaciano esattamente nelle loro basi: uno di essi è terminato da un tubo a vite destinato a fermarlo sul meato della macchina pneumatica. Preparato così l'apparecchio, e fattovi il vôto, i due emisferi restano aderenti. Allora per mezzo di una chiave di cui

è munito il tubo dell'emisfero inferiore, si chiuda la comunicazione all'esterno, e si tolga l'apparecchio dal piatto della macchina; i due emisferi non cesseranno di essere aderenti, e lo stesso Guerrick adattandovi secondo le diverse loro dimensioni or otto or dodici cavalli che tiravano in opposte direzioni, non li vide separare. Or se questi emisferi li poniamo sotto il recipiente della macchina pneumatica, e facciamo il vôto, li vedremo disgiungersi da se medesimi per la mancata pressione esterna.

— 2. Le oscillazioni del pendolo hanno dimostrato che la gravità agisce egualmente sopra ogni atomo di materia, qualunque ne sia la natura; in conseguenza la diversa celerità nella caduta dei gravi deve attribuirsi alla resistenza dell'aria. La macchina pneumatica ha messo in evidenza questa deduzione della teoria. Si prenda un tubo di vetro di 3 a 4 pollici di diametro e lungo almeno 5 a 6 piedi; sia chiuso ermeticamente in un estremo da un coverchio metallico, munito di meccanismo per sostenere dei piccoli corpi, e lasciarli poi cadere a volontà di chi sperimenta; nell'altro estremo poi sia perfettamente spianato per farlo combaciare col piatto della macchina pneumatica. Disposto così il tubo e poggiati un pezzetto metallico ed un fiocco di lana sul sostegno ad essi destinato, si faccia il vôto con quella perfezione che la macchina comporta, si giri una chiave annessa al meccanismo indicato, la lana ed il pezzetto metallico si vedranno pervenire nel tempo stesso sulla base del tubo. Si ripeta l'esperimento più volte di seguito, e si lasci ad ogni volta una dose maggiore di aria, si vedrà una differenza crescente tra le celerità dei due corpi.

— 3. I corpi, come il fumo ed il vapore, che si elevano nell'atmosfera, ubbidiscono alla stessa legge che fa galleggiare il legno sull'acqua ed il ferro sul mercurio. Conosciuto il peso dell'aria, questa deduzione era facile: gli accademici del Cimento la verificarono nel vôto barometrico; ma la macchina pneumatica ne ha resa più facile la pruova. Si metta sotto la campana una candela accesa, e si cominci a fare il vôto: a misura che questo progredisce, la fiamma si vedrà depressa, e nell'atto di

spegnersi sembrerà cadere dal lucignuolo, traendo in basso anche il fumo da cui sarà seguita.

— 4. Abbiamo sopra detto che i corpi perdono nell'aria una parte di peso eguale a quello del volume fluido discacciato. Per dimostrare la realtà di questa perdita si prendano due globi eguali in peso, uno di metallo massiccio e l'altro fatto da una lamina sottile, e si equilibrino agli estremi di un'asta di piccola bilancia. Si metta quest'apparecchio sotto la campana pneumatica, ed il vôto non sarà ancora giunto al suo limite, quando la bilancia si vedrà squilibrata dal lato del globo che ha maggior volume.

— 5. La continua ripulsione molecolare dei fluidi elastici è dichiarata dalla seguente sperienza. Una vessica compressa e strettamente ligata nel collo si metta sotto il recipiente della macchina: facendo il vôto, la poca aria che essa conteneva dilatandosi la gonfierà fino al punto di creparla.

112. Oltre la tromba aspirante, il cui effetto ha somministrato a Torricelli l'occasione di scovrire la pressione atmosferica, vi sono altri apparecchi che trovano il principio dèl loro movimento nell'azione meccanica dell'aria; tali sono il sifone, il vase di Mariotte, la fontana di Erone, la fontana intermittente.

Il *sifone* è un tubo ricurvo *abc* (*fig.* 145) a braccia diseguali, avendo l'orifizio del braccio corto *ab* immerso nel liquido contenuto in un recipiente *d*. Aspirando per l'estremo *c* del braccio lungo, la pressione atmosferica sulla superficie di livello del liquido, lo fa elevare in *ab*, e poi discendere per *bc*. E se allora si cessi dall'aspirare, il liquido non cesserà di uscire per l'orifizio *c*, se prima non sia di tanto diminuito nel recipiente, da lasciar libero l'orifizio del braccio *ab*. Per comprendere come la pressione atmosferica produca il movimento continuato del liquido, chiamiamo P il suo valore misurato dall'altezza di una colonna di acqua equivalente in peso, h l'altezza verticale del braccio *ab*, ed h' quella di *bc*. La pressione dell'aria all'orifizio *a* sarà $P - h$, e $P - h'$ quella fatta sull'orifizio *c*; in conseguenza il liquido contenuto nel sifone *abc* sarà animato dalla forza $(P - h) - (P - h')$,

e poichè $h < h'$, sarà $P - h > P - h'$, e la risultante di due forze opposte dovendo agire nel senso della forza maggiore, spingerà il liquido nella direzione *abc*, finchè il liquido del recipiente faccia una massa continua con quello entrato nel sifone.

Da questa ragione del fatto si rileva che sarebbe impossibile far agire un sifone, il cui braccio immerso nel liquido s'innalzasse sul livello di questo per un'altezza maggiore di 32 piedi.

Il *vase di Mariotte* è rappresentato dalla *fig.* 143. Si compone di un recipiente *ab* di vetro, chiuso esattamente da un turacciolo *c*. Questo è forato lungo l'asse, e riceve il tubo *d*, che a strofinjo si può far discendere o salire. Verso la base del recipiente vi è un foro chiuso dalla cannella *h* di piccolo diametro. Empito il recipiente di acqua, e situato il tubo *d* in modo che l'estremo *e* giunga in *e'* inferiormente al livello *ss* del foro *h*, si apra la cannella; si vedrà il liquido contenuto nel tubo *d* scendere rapidamente fino al livello *ss*, ivi fermarsi, e con esso il getto dalla cannella *h*: la quale se non fosse abbastanza stretta, l'aria dividendo la colonna liquida che ne chiude il foro, perverrebbe a slanciarsi nello spazio *m*, e produrrebbe un getto intermittente dal foro *h*. Non potendo così l'aria penetrare nella parte superiore del recipiente, quel poco che ivi potrà trovarsene sarà bentosto sì rarefatta per la piccola quantità di acqua che la cannella emette al cominciare dell'esperimento, che la sua tensione più il peso del liquido che gravita sul livello *ss* eguaglieranno la pressione atmosferica. Allora questa pressione mentre pel tubo *d* spinge l'acqua ad uscire dal recipiente per la cannella *h*, la retrospinge viceversa con egual forza per lo stesso tubo *h*. Così l'acqua si trova nel recipiente animata da due forze eguali ed opposte, e perciò si conserva in equilibrio. Or se il tubo *d* si elevi in modo che l'estremità inferiore *e* sia alquanto elevata sul livello *ss* del foro *h*, allora sul piano *ss* graviterà la pressione atmosferica per mezzo del tubo *d*, più il peso della colonna liquida *zs*; e la somma di queste due pressioni essendo maggiore di quella che l'aria in opposta direzione esercita pel foro *h*, l'acqua dovrà sgorgare dalla cannella, ed il suo livello *ll* nell'interno del recipiente

verrà discendendo. Quindi si forma un vôto nello spazio *m*, e l'aria vi accorre slanciandosi sotto forma di bolle dal foro *e*. Così la differenza tra le due forze opposte sarà sempre eguale alla pressione dello strato liquido *zs*, finchè questo non discenda al disotto *e*, ed in conseguenza costante eziandio sarà la celerità dello sgorgo. — Nelle sperienze fatte da Laroche e Bérard (nº 74) per determinare le capacità termiche dei gas, non altrimenti che per mezzo di vasi di Mariotte si otteneva una corrente uniforme di gas pel serpentino del calorimetro.

La *fontana di Erone* si compone di due recipienti A e B (*fig.* 150) comunicanti per mezzo del tubo *ac*. Sul recipiente A poggia un bacino, dal cui fondo partono due tubi, l'uno *bd* lo mette in comunicazione col recipiente B, e l'altro *ts* lo fa comunicare con A: quest'ultimo tubo è provveduto di una chiave *v*, per chiudere ovvero aprire una comunicazione all'esterno. Quando la fontana si vuole preparare all'esperimento, si apre la chiave *v*, e si capovolge l'apparecchio, per far passare l'acqua da B in A pel tubo *ca*: indi si restituisce alla sua posizione normale, si versa un altro poco di acqua in B pel tubo *bd*, e poi aprendo la chiave *v* si vedrà sorgere un zampillo di acqua, il quale vôterà a poco a poco il recipiente A; e così l'acqua raccolta dal bacino sarà per mezzo del tubo *bd* restituita al recipiente B. La cagione di questo zampillare dell'acqua pel tubo *st* sta nella compressione che l'aria contenuta in B soffre dall'acqua che vi giunge pel tubo *bd*, dopo che quella di B è passata in A. L'aria compressa in B reagisce pel tubo *ca* sull'acqua contenuta in A, sulla quale premendo più di quel che l'aria esterna fa pel tubo *ts*, la spinge per questo medesimo tubo sotto forma di zampillo. E poichè l'acqua che si toglie dal recipiente A viene restituita a B pel tubo *bd*; così la compressione che l'aria riceve al cominciare del movimento, si conserva finchè il livello dell'acqua in A non scenda al disotto dell'orifizio *s*. Allora avrà termine la compressione dell'aria, e con essa il getto dell'acqua.

La *fontana intermittente* è rappresentata dalla *fig.* 151 A è un recipiente di cristallo, che pel suo orifizio superiore si empie di

acqua, e si chiude esattamente con apposito turacciuolo. In questo recipiente penetra il tubo *bc* sostenuto verticalmente sul fondo del bacino *de* per mezzo dell'anello *k*. Ad una ghiera metallica, che unisce il tubo al recipiente A, sono annessi dei piccoli condotti *a*, *b*, ec. i quali comunicano coll'interno di A. Il tubo *bc* termina inferiormente con un taglio ad unghia; e nel fondo del bacino *de* avvi un foro *o* che mena al sottoposto recipiente *g*, e di tal diametro da non emettere in *g* tutta l'acqua che il bacino riceve dai condotti *a*, *b*, ec. Quindi avviene che l'acqua si accumula nel bacino, e chiude il meato inferiore del tubo *bc*. Allora cessa la comunicazione dell'aria esterna col recipiente A; l'aria interna si rarefà per lo spazio che resta vôto dallo sgorgo dell'acqua; ed in conseguenza la pressione atmosferica equilibra bentosto la pressione dell'acqua e dell'aria rarefatta contenute in A, e fa cessare il getto dai condotti *a*, *b*. Intanto l'acqua accumulata nel bacino scorre continuamente nel recipiente *g*; ed il suo livello sempre abbassandosi lascerà finalmente libera l'apertura inferiore del tubo *bc*: allora l'aria si slancerà dentro il tubo, l'equilibrio interno sarà ristabilito, ed il getto comincerà dinuovo. Lo stesso avvicendarsi di movimento e riposo si ripeterà finchè vi sarà dell'acqua nel recipiente superiore; e da ciò il nome di *fontana intermittente*.

CAPO QUINTO.

Tensione dei vapori — Equilibrio dei vapori nei gas.

113. Si dà il nome di *tensione* alla reazione dei fluidi elastici contro le pressioni esterne. Questa reazione, che l'industria dell'uomo ha saputo trasformare in un possente motore, richiedeva una misura relativa ai diversi gradi della scala termometrica. Dalton, cui la scienza deve le prime accurate ricerche per la soluzione di sì rilevante problema, ha cominciato dal mettere in chiaro la differenza che passa tra la tensione del vapore isolato, e quella dello stesso fluido che tuttavia sovrasta al liquido

generatore. Nel primo caso crescendo la temperatura da t a t', la tensione del vapore come quella di ogni altro gas aumenta nel rapporto di $1 + \alpha t' : 1 + \alpha t$. Supponiamo, per esempio, che una data massa di vapore passasse da 0° a 266°, la sua tensione aumenterebbe nel rapporto di 1 : 2 circa; ed in conseguenza essendo intorno a 5^{mm} la sua tensione a 0°, a 266° sarebbe 10^{mm}. Or in una tavola qui appresso si vedrà che il vapore sovrastante al liquido sotto la temperatura di 266° ha una tensione di 50 atmosfere, vale a dire di 38000^{mm}, ed in conseguenza 3800 volte maggiore dell'altra determinata nella prima ipotesi. Questa enorme differenza è prodotta dall'aumento di capacità pel vapore che un dato spazio acquista per l'accrescimento di temperatura; perciò alla tensione aumentata del vapore già esistente si aggiunge quella del nuovo vapore che si forma.

Per determinare la tensione del vapore sovrastante al liquido per temperature inferiori al suo grado di ebollizione, Dalton teneva il seguente metodo. In una caldaia di ferro fuso contenente del mercurio egli immergeva due tubi barometrici già pieni dello stesso liquido. Uno di questi barometri era destinato alla determinazione della pressione atmosferica nella durata dell'esperimento; l'altro, nel quale aveva già introdotto il liquido il cui vapore intendeva osservare, ne misurava la tensione. Egli circondava i due tubi con un largo cilindro di cristallo che riempiva di acqua od olio, secondo il diverso grado di calore a cui voleva estendere l'esperimento; così sottoponendo alla caldaia un fornello, il calore per mezzo di correnti ascendenti si comunicava al liquido contenuto nel cilindro, ed in conseguenza ai tubi barometrici. La temperatura del liquido destinato alla comunicazione del calore veniva segnata da un termometro ivi immerso; e la tensione del vapore era data dalla differenza di livello tra i due barometri, dopo averne ridotto col calcolo le altezze a 0°, ed averle corrette dell'errore che v'introduceva la pressione del liquido contenuto nel cilindro.

Così sperimentando Dalton trovava che ogni liquido alla temperatura della propria ebollizione svolge un vapore la cui ten-

sione eguaglia la pressione atmosferica al momento dell'esperienza; poichè ad una tale temperatura egli vedea depresso il mercurio del tubo barometrico fino al livello esterno del bagno. Così il vapore dell'acqua a 100°, quello dell'alcool a 79°, quello dell'etere a 47° hanno una tensione eguale ad un'atmosfera.

Il metodo di Dalton non poteva dare la misura della tensione dei vapori a temperature inferiori a quelle del mezzo ambiente. A tale oggetto il metodo di Dalton è stato modificato da Gay-Lussac nel seguente modo. Il tubo barometrico che conteneva il liquido, era curvato nell'estremità superiore per poterla introdurre in un mescuglio frigorifero. Così il vapore appena formato era liquefatto; l'evaporazione diveniva continua, e produceva in conseguenza un raffreddamento continuo nel liquido da cui si svolgeva. L'evaporazione avveniva in conseguenza ad una temperatura sempre più bassa, il cui limite era il grado termometrico della miscela frigorifera. Allora il vapore che n'era prodotto, non subiva liquefazione, perchè non pativa ulteriore raffreddamento. In tal modo Gay-Lussac ha determinato la tensione del vapore acqueo a 20° sotto 0°.

Da un recente lavoro di Regnault togliamo la seguente tavola delle tensioni del vapore acqueo espresse in millimetri di mercurio per ogni grado del termometro centigrado da — 32° a + 100°.

Temp.	Tensione.	Temp.	Tensione.	Temp.	Tensione.
— 32	0,31				
31	0,34	13	11,16	57	129,25
30	0,36	14	11,91	58	135,51
29	0,40	15	12,70	59	142,02
28	0,43	16	13,54	60	148,79
27	0,47	17	14,42	61	155,84
26	0,51	18	15,36	62	163,17
25	0,55	19	16,35	63	170,79
24	0,60	20	17,39	64	178,71
23	0,65	21	18,50	65	186,95
22	0,71	22	19,66	66	195,50
21	0,77	23	20,89	67	204,38
20	0,84	24	22,18	68	213,60
19	0,92	25	23,55	69	223.17
18	1,00	26	24,99	70	233,09
17	1,08	27	26,51	71	243,39
16	1,18	28	28,10	72	254,07
15	1,28	29	29,78	73	265,15
14	1,40	30	31,55	74	276,62
13	1,52	31	33,41	75	288,52
12	1,66	32	35,36	76	300,84
11	1,80	33	37,41	77	313,60
10	1,96	34	39,57	78	326,81
9	2,14	35	41,83	79	340,49
8	2,33	36	44,20	80	354,64
7	2,53	37	46,69	81	369,29
6	2,76	38	49,30	82	384,44
5	3,00	39	52,04	83	400.10
4	3,27	40	54,91	84	416,30
3	3,55	41	57,91	85	433,04
2	3,88	42	61,06	86	450,34
1	4,22	43	64,35	87	468,22
0	4,60	44	67,79	88	486,69
+ 1	4,94	45	71,39	89	505,76
2	5,30	46	75,16	90	525,45
3	5,69	47	79,09	91	545,78
4	6,10	48	83,20	92	566,76
5	6,53	49	87,50	93	588,41
6	7,00	50	91,98	94	610,74
7	7,49	51	96,66	95	633,78
8	8,02	52	101,54	96	657,54
9	8,57	53	106,64	97	682,03
10	9,17	54	111,95	98	707,28
11	9,79	55	117,48	99	733,31
12	10,46	56	123,24	100	760,00

I numeri contenuti in questa tavola sono stati calcolati da Regnault mediante la formola d'interpolazione, già proposta da Biot,

$$\log. s = a + b\alpha^t + c\beta^t,$$

nella quale s rappresenta la tensione in millimetri, t la temperatura in centigradi, ed a, b, c, α, β sono cinque costanti determinate da altrettante osservazioni, vale a dire da 5 determinazioni dirette della tensione del vapore acqueo a 5 diverse temperature pressocchè equidistanti tra loro, tra i limiti della scala termometrica fra i quali si vuole comprendere la tavola delle tensioni.

Abbiamo osservato (n° 79 — 4.°) l'influenza della pressione atmosferica sulla temperatura dell'ebollizione dell'acqua; ed ivi abbiamo indicata la costruzione di un termometro che può rendere sensibile la frazione di grado corrispondente ai minimi cangiamenti di pressione. Or dall'esposta legge di Dalton sappiamo che la tensione del vapore al grado di ebollizione eguaglia la pressione dell'atmosfera; quindi se si avesse una tavola che per gli ultimi quindici gradi dell'ordinaria scala termometrica facesse conoscere la tensione del vapore per ogni decimo di grado, basterebbe sapere in un dato luogo e tempo l'esatta temperatura dell'acqua bollente, per avere l'altezza barometrica al momento dell'esperienza, e quindi l'elevazione del luogo sul livello del mare. Questo metodo, ch' è dovuto al Rev. F.J.H. Wollaston, se non può sostituire l'indicazione diretta del barometro [1], quando si tratta di un'accurata livellazione, può tuttavia soddisfare la curiosità di un viaggiatore il quale non volesse soffrire il fastidio di quella continuata attenzione, che si richiede pel sicuro trasporto di un barometro.

La tavola seguente, calcolata da Regnault, somministra il mezzo di eseguire una livellazione mediante la temperatura dell'acqua bollente. Vi si legge la tensione del vapore acqueo per ogni decimo di grado da 95° a 101°.

[1] Un errore di 0,1 di grado nella temperatura dell'acqua bollente apporta una differenza di 2 millimetri circa nel valore della pressione atmosferica, e quindi un'alterazione di oltre a 20 metri nel determinare l'altezza del luogo di osservazione.

Grado.	Tensione.	Grado.	Tensione.	Grado.	Tensione.	Grado.	Tensione.
85,0	433,04	89,0	505,76	93,0	588,41	97,0	682,03
1	4,75	1	7,70	1	590,61	1	4,52
2	4,46	2	9,65	2	2,82	2	7,02
3	8,17	3	511,60	3	5,04	3	9,53
4	9.89	4	3,36	4	7,26	4	692,04
85,5	441,62	89,5	5,53	93,5	9,49	97,5	4,56
6	3,35	6	7,50	6	601,72	6	7,08
7	5 09	7	9,18	7	3.97	7	9,61
8	6,84	8	521,46	8	6,22	8	702,15
9	8,59	9	3,45	9	8.48	9	4,70
86,0	450,34	90,0	5,45	94,0	610,74	98,0	7,26
1	2,10	1	7,45	1	3,01	1	8,82
2	3.87	2	9,46	2	5,29	2	712,39
3	5,64	3	531,48	3	7,58	3	4,97
4	7,42	4	3,50	4	9,87	4	7,56
86,5	9,21	90,5	5,53	94,5	622.17	98,5	720,15
6	461,00	6	7,57	6	4,48	6	2,75
7	2,80	7	9,61	7	6,79	7	5,35
8	4,60	8	541,66	8	9,11	8	7,96
9	6,41	9	3,72	9	631,44	9	730,58
87,0	8,22	91,0	5,78	95,0	3,78	99,0	3.21
1	470,04	1	7,85	1	6,12	1	5,85
2	1,87	2	9,92	2	8,47	2	8,50
3	3,70	3	552,00	3	640,83	3	741,16
4	5,54	4	4,09	4	3,19	4	3,83
87,5	7,38	91,5	6,19	95,5	5,57	99,5	6,50
6	9,23	6	8,29	6	7,95	6	9,18
7	481,08	7	560,39	7	650,34	7	751,87
8	2,94	8	2,51	8	2,73	8	4,57
9	4,81	9	4,63	9	5.13	9	7,28
88,0	6,69	92,0	6,76	96,0	7,54	100,0	760,00
1	8,57	1	8,89	1	9,95	1	2,73
2	490,45	2	571,03	2	662,37	2	5.46
3	2,34	3	3.48	3	4,80	3	8,20
4	4,24	4	5,34	4	7,24	4	771,95
88,5	6,15	92,5	7,50	96,5	9,69	100,5	3,71
6	8,06	6	9,67	6	672,14	6	6,48
7	9,98	7	581,84	7	4,60	7	9,26
8	501,90	8	4,02	8	7,07	8	782.04
9	3,82	9	6,21	9	9,55	9	4,83
						101,0	7,63

114. Al metodo seguito da Dalton per misurare la tensione del vapore tra 0° e 100° si potrebbe opporre che la depressione osservata nel tubo barometrico non è interamente prodotta dal va-

pore del liquido che sovrasta al mercurio, ma che una parte almeno sia dovuta all'evaporazione di quest'ultimo. A tale obbiezione rispondono i risultamenti delle sperienze di Avogadro, che ha determinato direttamente la tensione del vapore di mercurio a diverse temperature. Egli prese un tubo di vetro ABC (*fig.*152) voltato a sifone, e terminato dalla palla A. Due terzi di questa erano occupati da mercurio; che nell'altro braccio si elevava allo stesso livello; nel resto della palla si conteneva aria atmosferica perfettamente secca. Il sifone era fermato ad una tavoletta di ottone che portava una scala in millimetri. Il tubo così preparato veniva immerso in un bagno K di olio di oliva, insieme ad un termometro H graduato da 0° a 300°. L'illustre fisico, cui si debbono queste ricerche, con esperienze preliminari aveva determinato l'aumento di tensione che l'aria prendeva tra i limiti di temperatura, pei quali voleva misurare la tensione del vapore di mercurio; in conseguenza sottraendo dall'effetto totale misurato dalla differenza di livello nel tubo ABC, quello che avrebbo avuto dall'aria sola, otteneva nel residuo la tensione del vapore di mercurio. In tal modo egli aveva i seguenti risultamenti.

Temperature.	*Tensioni in* mm.
230°	58,01
240.	80,02
250.	105,88
260.	133,62
270.	165,22
280.	207,59
290.	252,51

Avogadro ha trovato ancora che i risultamenti delle sue sperienze erano espressi dalla forma empirica.

$$\log. e = -0,64637.\,t + 0,076956\,t^2 - 0,18452\,t^3,$$

nella quale la tensione e del vapore di mercurio ha per unità $0^m,76$ ossia un'atmosfera, e la temperatura t, che ha 100° per unità, è numerata positivamente da 360° a 0°. Volendo, per esempio, la tensione del vapore di mercurio a 100°, bisognerà che nella formola si faccia $t = 2,6$ perchè 100° dista di 260°

da 360°. Fatta questa sostituzione si ha log. $e = -4,0346$, cui corrisponde $e = 0^{mm},03$, quantità trascurabile; e perciò i risultamenti ottenuti da Dalton non han bisogno di essere corretti della parte di tensione dovuta al vapore di mercurio — La stessa formola per la temperatura di 30°, vale a dire per $t = 3,3$ dà $e = 0^{mm},000009$, quantità fisicamente nulla; perciò il vapore di mercurio che si forma nel vôto barometrico, non può deprimere la colonna mercuriale di quantità valutabile tra i limiti della sua misura.

115. Dalle sue ricerche sulle tensioni dei vapori Dalton aveva dedotto che vapori di diversa natura hanno tensioni eguali per temperature equidistanti dal grado di ebollizione dei rispettivi liquidi. L'acqua per esempio, bolle a 100°, ed a 60° il suo vapore ha la tensione di $144^{mm},66$: la stessa tensione avrà il vapore dell'alcool a 39°, vale a dire a 40° sotto al punto di ebollizione la quale avviene a 79°. Questa legge che riesce vera per l'acqua, l'etere, e l'alcool, che sono i liquidi messi a pruova da Dalton, non si trova egualmente esatta per gli altri. Despretz per verificarne l'esattezza ha fatto bollire diversi liquidi sotto una pressione minore di un'atmosfera; i vapori avendo così una stessa tensione, avrebbero dovuto avere per la legge di Dalton una temperatura equidistante da quella della loro ebollizione sotto la pressione di $0^{m},76$. Intanto l'etere ha presentato 1° di differenza, ma dall'essenza di terebentina si è avuta una differenza di 7.° Se a questi risultamenti di Despretz aggiungiamo quelli di Avogadro sulla tensione del vapore di mercurio, avremo una divergenza maggiore dalla legge di Dalton. A 240° la temperatura del mercurio dista di 120° da quella della sua ebollizione, ed il suo vapore ha la tensione di $80^{mm},02$: l'acqua a — 20°, ossia a 120° dal suo grado di ebollizione dà un vapore della forza di $0^{mm},84$, vale a dire di una tensione circa 100 volte minore di quella del mercurio.

116. I metodi fin'ora esposti riguardano la misura delle tensioni dei vapori a temperature non superiori a quelle dell'ebollizione dei liquidi che li producono. Intanto l'industria impiega il vapo-

re acqueo a tensione di più atmosfere, e quindi sotto una temperatura superiore a 100°. Prima che Dulong ed Arago avessero studiato la tensione del vapore acqueo ad alte temperature, non si avevano all'oggetto ricerche che si estendessero oltre 8 atmosfere, ed anche tra questi limiti erano poco soddisfacenti. I sullodati fisici dopo aver verificato la legge di Mariotte fino a 27 atmosfere, passarono alla misura del vapore acqueo sotto elevate temperature. L'apparecchio che usarono in tale ricerca, è rappresentato dalla *fig.*153.C è una caldaia di lamine di ferro della capacità di 80 litri: T, T sono due tubi di ferro pieni di mercurio, dei quali l'uno va fino al fondo della caldaia, e l'altro si ferma al terzo superiore. In questi due tubi sono contenuti due termometri a mercurio, i cui cannelli, curvati nell'uscire dalla caldaia, sono circondati da tubi pei quali passa una corrente di acqua a temperatura costante: così può valutarsi l'errore prodotto nelle loro indicazioni, per non essere sottoposti in tutta la loro estensione all'alta temperatura del vapore. BDEG è un tubo che fa comunicare la caldaia col recipiente *k*, che somministra il mercurio al manometro M. Il tubo DEG è pieno di acqua, e perchè questa non fosse deficiente quando il mercurio si eleva nel manometro, il tubo è bagnato continuamente da una corrente di acqua che addensando il vapore somministra nuovo liquido. La colonna di tubi dell'apparecchio manometrico rappresentato dalla *fig.* 139 è sostituito dal solo tubo *hv*, il quale comunicando col vase *k* fa conoscere l'altezza del mercurio che vi è contenuto — Ecco i risultamenti ottenuti con questo apparecchio.

Tensione in atmosfere.	Temperatura in gradi cent.	Tensione in atmosfere.	Temperatura in gradi cent.
1	100°	13	193,7
1,5	112,2	14	197,2
2	121,4	15	200,5
2,5	128,8	16	203,6
3	135,1	17	206,6
3,5	140,6	18	209,4
4	145,4	19	212,1
4,5	149,1	20	214,7
5	153,1	21	217,2
5,5	156,8	22	219,6
6	160,2	23	221,9
6.5	163,5	24	224,2
7	166,5	25	226,3
7,5	169,4	30	236,2
8	172,1	35	244,8
9	177,1	40	252,5
10	181,6	45	259,5
11	186,0	50	265,9
12	190,0		

I numeri segnati in questa tavola sono dati dell'esperienza da 1 a 24 atmosfere, da questo limite a 50 atmosfere i numeri sono stati calcolati mediante la formola empirica

$$y = (1 + 0,7153\, x)^5,$$

nella quale y rappresenta la tensione in atmosfere di $0_m,76$, ed x la temperatura la quale comincia a numerarsi da 100°, ed ha per unità lo stesso numero 100°; dimodochè a 100° avremo $x = 0$, a 150°,200,250,° ec. si ha $x = 0,5, = 1, = 1,5$ ec.

Tredgold ha proposto invece la formola

$$x = 85 \sqrt[6]{y} - 75,$$

in cui x rappresenta la temperatura in gradi centigradi cominciando da 0°, ed y la tensione in centimetri di mercurio.

Da 1 a 4 atmosfere la formola di Tredgold si accorda meglio coll'esperienza, ma per le tensioni superiori a 4 atmosfere la formola di Dulong e Arago merita la preferenza.

117. Saussure, come abbiamo detto (n.° 79) ha trovato che la quantità di vapori che si forma in un dato spazio ad una certa

temperatura, è costante sia vôto lo spazio, ovvero occupato da un gas qualunque. E Dalton misurando le tensioni dei vapori, ha trovato ch'esse per un medesimo liquido dipendevano soltanto dalla temperatura, senza veruna relazione al gas già esistente nello spazio che riceveva il vapore; dimodochè questo sopraggiungendo non fa che unire la sua tensione a quella del gas.

A mettere in evidenza, questa legge di equilibrio dei vapori nei gas serve un apparecchio inventato da Gay-Lussac, e rappresentato dalla *fig.*154. *ab* è un tubo di vetro piuttosto largo, e che dalla parte inferiore comunica col tubo *cd* di piccol diametro: *m*, *m'* sono due chiavi di ferro; e *k* è un globo di vetro che per mezzo di un tubo provvisto ancora di chiave può comunicare con *ab*. Si empia quest'ultimo di mercurio perfettamente asciutto, e si aggiunga il globo *k* contenente un gas ben secco. Indi si aprono le due chiavi *m*, *m'*: così la discesa del mercurio farà penetrare porzione del gas in *ab*, e quando questa sia sufficiente, si chiudano le chiavi e si tolga il globo. Per l'espansione sofferta dal gas nel passare dal globo nel tubo, la sua tensione sarà diminuita, ed in conseguenza il mercurio resterà in *ab* ad un livello più alto che in *cd*; e perchè il gas vi stia sotto l'intera pressione atmosferica, si aggiungerà tanto mercurio pel tubo *cd*, finchè le due colonne siano al medesimo livello: allora si potrà leggere il volume del gas, poichè il tubo *ab* è già diviso in parti di eguale capacità. Or nel luogo che occupava il globo si ponga il piccolo imbuto *n*, provvisto di chiave, che in vece del solito foro abbia una piccola cavità; la quale girata in alto serve a ricevere poche gocce di liquido, che poi lascerà cadere dentro *ab* movendosi di mezzo giro. Il liquido penetrando in *ab*, verrà ridotto in vapore, ed apporterà in conseguenza una depressione nel livello del mercurio. Si ripeta questa operazione, finchè il mercurio non divenga stazionario, chè allora si avrà un segno certo dell'essere saturato di vapore lo spazio occupato dal gas. E l'aumento di tensione che il gas ha ricevuto dalla presenza del vapore sarà misurato dalla differenza di livello tra le due colonne di mercurio, dopochè aggiungendo di questo liquido pel tubo *cd*, il gas avrà ripreso il vo-

lume primitivo. Si potrebbe ancora misurare la tensione del vapore, aprendo la chiave m', e facendo scorrere del mercurio, finchè sia eguagliato il livello di ab con quello di cd. Chiamiamo v il volume primitivo del gas, v' quello a cui si è esteso per la discesa del mercurio, e p la pressione atmosferica al momento dell'esperienza: per la legge di Mariotte la tensione del gas senza quella del vapore sarà $\frac{vp}{v'}$, e quindi la tensione del solo vapore sarà espressa da $p - \frac{vp}{v'}$.

Or se nel vôto barometrico s'introduca un poco dello stesso liquido che si è fatto evaporare nell'apparecchio qui sopra descritto, si vedrà che ad una medesima temperatura avrà la stessa tensione. Dunque: *i vapori si equilibrano in un dato spazio indipendentemente dalla presenza di qualunque gas, purchè tra questo ed il vapore non si spieghi verun'azione chimica.* Questa legge, scoverta da Dalton, offre il mezzo di risolvere i seguenti problemi.

— 1° *Dato il volume* v *di un mescuglio di gas e vapore, la tensione* f *di quest'ultimo, la temperatura* t *del mescuglio e la pressione* p *cui è sottoposto: si vuol sapere il volume* v' *che avrebbe il gas privo di vapore, alla temperatura* t' *e sotto la pressione* p'.

Il gas mescolato al vapore sostiene la pressione $p - f$: quando poi è sottoposto alla pressione p', il suo volume v per la legge di Mariotte diviene $v\frac{p-f}{p'}$. E questo volume dovendo passare dalla temperatura t a t', si dovrà moltiplicare pel rapporto $\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}$; e perciò si ha

$$v' = v\frac{p-f}{p'} \cdot \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}.$$

Applicazione numerica. Uno spazio di 80 centimetri cubi contiene aria e vapore acqueo alla temperatura 15°, sotto l'altezza barometrica 0m,683, essendo la tensione del vapore 10mm: si

cerca il volume dell'aria secca alla temperatura 0°, e sotto la pressione 0m,76. Facendo nella formola precedente $v = 80$, $p = 0^m683$, $f = 0^m,010$, $p' = 0^m,760$, $t' = 0°$, $t = 15°$, $\alpha = 0,00366$, si avrà $v' = 67,15$.

— 2° *In un recipiente inestensibile sono contenuti un gas ed un liquido; sul principio la pressione e la temperatura erano* p *e* t, *poi sono divenute* p' *e* t': *si vuol sapere se vi è stato assorbimento o sviluppo di gas.*

Chiamiamo f ed f' le tensioni del vapore alle temperature t e t' e p'' la pressione nell'ipotesi che non vi fosse stato nè sviluppo nè assorbimento di gas. Questa pressione p'' sarebbe prodotta dalla tensione f', più l'elasticità dell'aria alla temperatura t', la quale è $(p - f)\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}$; quindi si avrebbe

$$p'' = f' + (p - f)\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}.$$

Or trovando $p'' = p'$, non vi è stato assorbimento o sviluppo di gas; ma se p'' si trovasse maggiore o minore di p', vi sarebbe stato assorbimento nel primo caso, e sviluppo nel secondo. Un problema simile si presenta al fisiologo nelle sue ricerche sulla respirazione delle piante e degli animali.

— 3° *Un mescuglio di gas e vapore sovrasta al liquido generatore in un recipiente estensibile. Il volume del mescuglio è* v, t *la temperatura e* p *la pressione, si vuol sapere il volume* v' *che avrebbe alla temperatura* t' *e sotto la pressione* p'.

Per la legge di Dalton possiamo eliminare la tensione del vapore, e considerare il gas come sottoposto successivamente alle pressioni $p - f$ e $p' - f'$, f ed f' indicando le tensioni del vapore alle temperature t e t'. La legge di Mariotte combinata coll'alterazione di elasticità del gas prodotta dal cangiamento di temperatura, ci darà

$$v' = v\frac{p - f}{p' - f'}.\ \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}.$$

Se il gas fosse perfettamente secco, non sovrastando a liquido veruno capace di emettere vapore sensibile tra i limiti di tem-

peratura t e t', f ed f' sarebbero nulle e la formola precedente diverrebbe

$$v' = v\ \frac{p}{p'} \cdot \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}.$$

Questa medesima formola risolverebbe il problema, quando il gas non sovrastando ad una sorgente di vapore, non fosse purtuttavia perfettamente secco, ma contenesse tal dose di vapore che tra le variazioni di pressioni p e p' e quelle di temperatura t e t' non fosse in parte ridotto allo stato liquido. Ed in vero chiamando f ed f' le tensioni del vapore corrispondenti alle pressioni p e p', il loro rapporto $\frac{f}{f'} = \frac{p}{p'}$ nel passare dalla temperatura t a t' diverrà

$$\frac{f}{f'} \cdot \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t} = \frac{p}{p'} \cdot \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t},$$

donde
$$\frac{p-f}{p'-f'} \cdot \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t} = \frac{p}{p'} \cdot \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t};$$

e perciò
$$v\ \frac{p}{p'} \cdot \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t} = v\ \frac{p-f}{p'-f'} \cdot \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}.$$

Supponiamo $t = t'$ e $p' > p$, e che il vapore nel passare dalla pressione p a p', in parte si riducesse allo stato liquido, allora f' avrebbe un valore minore di quello dato dalla relazione $\frac{f}{f'} = \frac{p}{p'}$ in conseguenza $p' - f'$ diverrebbe più grande, e v' viceversa diverrebbe più piccolo di quello ch'è dato dalla sua equazione. È questo precisamente il caso del tubo di Mariotte: se l'aria che vi è rinchiusa non è perfettamente secca, la riduzione del volume sarà più rapida di quella che richiede la ragione inversa delle pressioni.

SEZIONE II.

IDRODINAMICA.

118. Abbiamo detto nei preliminari che la Fisica nel suo continuo progresso tende a ridurre le diverse teoriche dei fenomeni ad altrettante applicazioni di Meccanica razionale. Talune di queste teoriche, come la Gravitazione planetaria e l'Acustica, sono già pervenute a questo alto grado di perfezione; e se per altre la scienza non conosce ancora un fatto che mentre costituisca l'elemento primo di un'intera classe di fenomeni, sia nel tempo stesso l'espressione concreta di qualche teorema sulle leggi del movimento; purtuttavia al difetto di un principio positivo ha cercato supplire con qualche concetto ipotetico, che dasse alla dottrina almeno la forma di applicazione meccanica. Un esempio di quest'ultimo sforzo dello spirito umano l'abbiamo nel sistema delle ondulazioni, con cui la Fisica moderna cerca coordinare ad una sola forma di moto tutti i fenomeni della luce.

Ben altrimenti è avvenuto pei fenomeni riguardanti il movimento dei liquidi. La gravità, le cui leggi sono note, è cagione permanente di questi fenomeni; e se nella produzione del moto essa è variamente modificata dall'azione delle forze molecolari, queste offrono al calcolo la condizione di esser nulle ad una distanza finita dal contatto, condizione che ha permesso al Poisson di poter coordinare gli effetti di queste forze ad una teoria interamente positiva. Combinando questi elementi col principio di egual pressione il geometra è pervenuto all'equazioni generali del movimento dei liquidi; ma l'imperfezione del cal-

colo trascendente ha presentato tale ostacolo alla riduzione di queste equazioni in termini finiti, che l'Idrodinamica razionale, vale a dire l'Idrodinamica riguardata come una branca di Meccanica applicata, è tuttavia una scienza desiderata.

L'Idrodinamica nel suo stato presente non è che una scienza puramente sperimentale; e l'algoritmo ch'essa sovente impiega, non ha un valore logico superiore a quello di una formola empirica, poichè la sua funzione tutta si comprende nel presentare sotto forma esplicita quelle relazioni che implicite si trovano nel dato sperimentale [1].

[1] Perchè la parola *empirica* usata nel testo non avesse ad eccitare la bile dei pedanti, usi a vedere ogni trattato di Meccanica diviso nelle quattro parti di rito STATICA, DINAMICA, IDROSTATICA ed IDRODINAMICA, e quest'ultima parte forse più delle altre ispida di formole sovente composte di funzioni trascendenti; per non cagionare, lo diceva, un disturbo alle loro funzioni epatiche, mi veggo nell'obbligo di esporre più chiaramente il mio pensiero.

L'Idrodinamica si aggira intorno a due quistioni cardinali che sono le leggi dei movimenti prodotti da forze intrinsecbe ai liquidi, e quelle dei movimenti prodotti da forze estrinseche. Queste ultime sono fin ora formolate dall'ipotesi newtoniana o da altra sulla legge di resistenza; le prime sono conseguenze di un calcolo riducibile a termini finiti nel solo caso del moto lineare del liquidi, considerato però sotto la veduta anche ipotetica del parallelismo delle falde liquide. Quanto le ipotesi finora proposte sulla resistenza dei fluidi vadano di accordo col fatto, basterà interrogarne la scienza balistica, la quale dirà che le conseguenze del principio quasi più non si riconoscono nelle correzioni additate dall'esperienza; e rispetto alle leggi del movimento lineare, il solo realmente accessibile al calcolo, oltre l'insussistenza del principio delle falde parallele, le formole che rappresentano le portate delle luci dei recipienti, hanno bisogno di un fattore empirico, variabile secondo la forma della luce, per mettere in accordo i risultamenti sperimentali colle indicazioni del calcolo. E perchè una formola possa dirsi razionale, ogni elemento della funzione più o meno complessa che la costituisce, dev'essere determinato a priori.

Quando il fisico vuol trovare la relazione della temperatura alla tensione del vapore, prende per esempio, la funzione

$$e = a + bt + ct^2;$$

cerca in tre osservazioni scelte con giudizio i valori della tensione e e della temperatura t; sostituisce questi valori nella formola proposta, ed ot-

CAPO PRIMO.

Teorema di Torricelli — Contrazione della vena liquida — Leggi dell' efflusso dai recipienti che si votano. Clessidre — Getti parabolici. Efflusso dalle luci laterali, e dagli emissari a fior d'acqua — Effetti dei tubi addizionali — Acque zampillanti.

119. Se un fatto osservato le mille volte aveva dimostrato che i liquidi sgorgano dai fori fatti sulle pareti dei recipienti con una celerità più grande come i fori più distano dalla superficie

tiene tre equazioni per determinare le costanti a, b, c. E si osservi che nessuna ipotesi guida il fisico nello stabilire la forma della funzione, da cui attende la relazione richiesta. Egli dapprima la costruisce come la consiglia la facilità del calcolo; indi la sottopone alla pruova dell'esperienza, per conoscere con qual grado di approssimazione essa rappresenta i valori dati dal fatto; e secondo che essa soddisfa o pur no al suo uffizio, la ritiene, o la rigetta cercandone altra più confacente all'uopo. Questo metodo, logico per eccellènza ogni volta che la quistione resiste ad una soluzione a priori, pone la scienza sulla via di un progresso reale, poichè ottiene le relazioni richieste rappresentate da valori sempre meno divergenti dal vero.

Possiamo dire altrettanto delle ricerche fatte sulle leggi dei movimenti dei liquidi? — L'idraulico comincia dal tradurre in algoritmo il teorema empirico di Torricelli, che gli diventa un vero letto di Procuste, poichè prendendo a dominare tutta l'esposizione della dottrina, nella quale continuamente si riproduce sotto diverse forme, si presenta innanzi ad ogni ricerca sperimentale, e definisce la forma della funzione da mettersi a pruova. L'esperimento allora invece di somministrare gli elementi di una qualche legge, è limitato alla determinazione di un coefficiente, che non di rado varia secondo le diverse circostanze del fatto. Così la formola che l'idraulico completa, al suo carattere empirico aggiunge quella grettezza che viene da un costante servire ad un principio inassistente.

Finchè gli sforzi incessanti dei geometri non abbiano compiuta la grande opera dell'Idraulica razionale, e finchè essa dopo esser divenuta una scienza, non dia il secondo e non meno arduo passo di prendere quella forma elementare che sola può introdurla nel sistema didattico; l'unica esposizione logica che può ricevere la scienza del movimento dei fluidi, è la forma sperimentale, in cui il calcolo non abbia altra funzione che quella di collegare i risultamenti dell'esperienza. A che serve un intralciato al-

superiore del liquido interno; purtuttavia una relazione tra la celerità dello sgorgo e l'altezza del liquido sovrastante al foro non fu conosciuta la prima volta che per le sperienze fatte in Italia da Raffaele Maggiotto sul cominciare del secolo diciassettesimo. Più tardi l'esperimento fu ripetuto dal Torricelli, che vi aggiunse una dimostrazione geometrica, quale poteva concepirsi nell'infanzia dell'applicazione matematica ai fenomeni naturali.

Questi sperimenti consistèvano nel tenere costantemente pieno di acqua un alto recipiente prismatico o cilindrico, sulle cui pareti erano scolpiti più fori eguali a distanze varie dal livello superiore del liquido. Durante tempi eguali l'acqua si lasciava fluire successivamente da ogni foro, e raccoltine i prodotti in vasi distinti se ne misurava la quantità. In questo modo si è trovato che se le distanze dei fori dalla superficie suprema dell'acqua erano proporzionali ai numeri 1, 4, 9, 16, 25, ec. le quantità emesse e quindi le celerità di efflusso erano proporzionali ai numeri 1, 2, 3, 4, 5, ec. vale a dire alle radici quadrate delle altezze. Allora Galileo aveva già dimostrato che la celerità che i gravi acquistano cadendo è proporzionale alla radice quadrata

gorilmo, che va a risolversi nel teorema di Torricelli, o che trascina l'ipotesi newtoniana per la lunga serie delle sue conseguenze? Lo studioso, cui la Provvidenza largì acume di mente, segue con fastidio un calcolo, alle cui conseguenze non può aver fede; e se l'ingegno è scarso, allora alla deficienza intellettuale la scuola accoppia bellamente la potenza brutifera di un raziocinio illogico.

Un trattato d'Idraulica sperimentale meglio che altrove può essere pensato in Italia, che per la sua celebre *Collezione d'Idraulici* sta innanzi a tutte le altre nazioni. Noi potremmo avere un tipo di questo lavoro nell'*Idraulica Fisica* del Conte Mengotti, se lo scopo di questa opera egregia non fosse quello di rendere popolari le cognizioni sui fiumi. E Dio ci guardi dal confondere coll'ingegno comune quello della gioventù studiosa, da cui la società attende di veder sanate le sue piaghe per mezzo di una severa e santa istruzione.

L'idraulico che oggi riassumesse in un'opera didattica ciò che vi ha di più rilevante sotto la veduta sperimentale nella voluminosa *Collezione degl'Idraulici italiani*, aggiungendovi ancora i risultamenti ottenuti oltre Alpi, farebbe ricco dono alla gioventù studiosa, ed associerebbe il suo nome ad opera non peritura.

dell'altezza da cui discendono; quindi Torricelli dedusse che la celerità, con cui il liquido sgorga da un foro scolpito nella parete di un recipiente, è quella che un grave acquisterebbe cadendo da un'altezza eguale a quella del liquido che sovrasta al foro [1]. Per ciò chiamando v la velocità con cui esce la vena liquida, a l'altezza del livello interno su quello del foro, e g la forza di gravità, avremo (n.° 26)

$$v = \sqrt{2\,ga}.$$

Novelle pruove al teorema di Torricelli aggiunsero gli accurati e moltiplici sperimenti del Mariotte in Francia: indi quelli di Guglielmini in Bologna e gli altri di Poleni in Padova, eseguiti con solenne apparato ed in presenza di uomini dottissimi gli conciliarono quel carattere di verità, pel quale è tuttavia da non pochi riguardato come base dell'Idrodinamica sperimentale.

Intanto la Meccanica dei fluidi che trovava nel principio di egual pressione il mezzo di dedurne col calcolo le leggi dell'equilibrio, mancava di un concetto che tradotto in algoritmo presentasse nelle sue deduzioni il teorema di Torricelli e quindi tutte le leggi idrodinamiche. Questo si ebbe nell'ipotesi del *parallelismo delle falde liquide*, vale a dire nel supporre che quando un liquido sgorga da un recipiente, le diverse falde, in cui possiamo immaginare divisa la massa tuttavia in esso contenuta, discendano parallele a loro stesse, conservando così piane le loro superficie di livello. Ma questa ipotesi non è ammisibile che fino ad una certa distanza dal foro, poichè Giovanni Bernoulli, che la propose, fu anche il primo ad avvertire che in vicinanza dell'orifizio la corrente liquida si trasforma in una conoide da lui chiamata *gorgo* che ha per base superiore una sezione del recipiente, e per base inferiore l'area della luce. Dei piccoli corpi alquanto più pesanti dell'acqua, come pezzetti di cera lacca o di carta bagnata, lasciati cadere nel recipiente mentre il liqui-

[1] Come chiaramente dimostrano i getti parabolici, di cui parleremo al n° 124.

do sgorga, si vedranno discendere verticalmente fino ad una certa distanza dall'orifizio, e poi piegarsi verso di questo, appena entrano nella sfera di azione del gorgo; che se poi l'esperimento fosse ripetuto tenendo chiuso il foro con un dito, si vedrebbero quei corpuscoli scendere verticalmente fino al fondo, senza mai divergere dall'incominciato cammino. Questa speciale modificazione della corrente quando è prossima alla luce di eflusso, genera quella specie d'imbuto, denominato *cateratta* da Newton, che comincia a formarsi sulla superficie di livello, appena che scendendo perviene a toccare la base superiore del gorgo conoidale.

La velocità di efflusso trovata dal calcolo, come conseguenza dell'ipotesi sopraddetta, per un vaso inesausto di cui m sia la sezione suprema ed f quella della luce; è data dall'equazione

$$v = \sqrt{\frac{2ag}{1-\frac{f^2}{m^2}}} \cdot \frac{e^{kt}-1}{e^{kt}+1}$$ [1]

nella quale si vede che la velocità v è dipendente dal tempo t dell'eflusso, e ch'essa tende al limite $\sqrt{\frac{2ag}{1-\frac{f^2}{m^2}}}$, cui perverrà quando sia $t = \infty$. E supponendo soddisfatta questa condizione, la velocità v dovrà aumentare, come cresce il rapporto $\frac{m}{f}$, vale a dire come l'area della luce aumenta in proporzione di quella del recipiente. Or a queste due conseguenze del calcolo sono diametralmente opposti i risultamenti dell'esperienza, la quale ha dichiarato — 1° esser nulla l'influenza del tempo poichè bastano poch'istanti a rendere uniforme la velocità dell'efflusso — 2° che questa velocità diminuisce invece di crescere, quando aumenta il rapporto $\frac{f}{m}$, come chiaramente si rileva da sperimenti eseguiti dal conte Mengotti, e che descriveremo quì appresso.

[1] Venturoli — *Meccanica* — tom. *II* — n° 133 *a* 139.

Essendo le conseguenze del calcolo opposte ai risultamenti sperimentali, torniamo al teorema empirico di Torricelli, e cerchiamo tra quali limiti l'esperienza ha confermato la relazione che il teorema stabilisce tra la velocità dell'efflusso e l'altezza dell'acqua sovrastante al livello del foro. Chiamiamo f l'area della luce scolpita nel fondo di un recipiente, di cui a è l'altezza, t la durata dell'ufflusso, e Q la quantità di acqua uscita o la *portata* del recipiente, che si terrà costantemente pieno con acqua affluente dalla parte superiore; avremo

$$Q = ft\sqrt{2ag},$$

poichè il volume di acqua uscito dal recipiente nel tempo t equivale a quello di un cilindro che avesse per base l'area del foro e per altezza lo spazio $tv = t\sqrt{2ag}$ che una molecola liquida avrebbe percorso nel tempo t, se avesse conservata la velocità v con cui è uscita dal foro. Con altra altezza o *carica* a', si avrebbe similmente la portata

$$Q' = ft\sqrt{2a'g};$$

donde

$$Q : Q' = \sqrt{a} : \sqrt{a'} = v : v'.$$

Dunque se le velocità sono come le radici quadrate delle altezze, le portate dovranno essere nella stessa ragione. Ed ecco come Mariotte, Guglielmini, Poleni, Michelotti, ec, ec. hanno messo alla pruova dell'esperienza il teorema di Torricelli. Nella seguente tavola si leggono i risultamenti di una tra le serie di sperienze fatte da Mariotte.

Diametro del foro.	Pressione sul foro.	Serie delle radici delle pressioni.	Serie delle portate o velocità.
metri	metri		
0,01	0,026 0,03 0,04 0,04 0,06	1,000 1,074 1,241 1,386 1,519	1,000 1,064 1,244 1,393 1,524
0,027	1,30 2,92 3,81	1,000 1,500 1,713	1,000 1,497 1,707
0,081	2,34 3,81 6,76	1,000 1,305 1,738	1,000 1,303 1,692
0,162	2,11 3,66	1,000 1,315	1,000 1,315
Quadrato 0m,20 per 0m,20	0,40 0,70 1,00 1,30 1,60	1,000 1,323 1,581 1,803 2,000	1,000 1,330 1,590 1,806 2,000

Mariotte aveva ancora osservato che i risultamenti dell'esperienza divergevano in meno da quelli che assegnava il calcolo, come la luce diveniva più grande rispetto all'ampiezza del recipiente: così sperimentando su due luci l'una di 4 linee di diametro e l'altra di 12, invece di ottenere dalla seconda una portata 9 volte maggiore l'ebbe 8 volte soltanto. Guglielmini e Poleni non usarono luci che avessero coll'area circolare del vase

un rapporto maggiore di 1 : 9000 circa. Michelotti aumentò poi il diametro delle luci portandolo fino a tre pollici, ma questa dimensione non era assai grande rispetto alle dimensioni della torre, che facea da recipiente [1].

Tra gl'idraulici quegli che spinse le ricerche sperimentali fino ad un limite sufficiente fu il conte Mengotti, il quale usò luci che variavano da $\frac{1}{5184}$ a $\frac{1}{4}$ dell'estensione del fondo. Egli adoperava recipienti di forma parallepipeda a base quadrata di 24 pollici di lato, ed alti piedi 15 e 4 pollici. Questi vasi erano alimentati da un rivo che costeggiava la pendice di un colle; e per ognuno l'efflusso durava un minuto. Nella tavola seguente se ne leggono i risultamenti.

Numero delle luci.	Dimensioni delle luci in pol.quad.	Ragione dell'area della luce a quella del fondo.	Ragione delle luci tra loro.	Portata in piedi cubici	
				sperimentata	teorica.
I	1/9	1:5184	1	1	1
II	1/3	1:1728	3	3 circa	3
III	1	1: 576	9	8,75	9
IV	3	1: 192	27	25,5	27
V	6	1: 96	54	45	54
VI	12	1: 48	108	85	108
VII	24	1: 24	216	160	216
VIII	48	1: 12	432	334	432
IX	96	1: 6	864	648	864
X	144	1: 4	1296	930	1296

[1] Michelotti eseguiva i suoi sperimenti allo stabilimento idraulico espressamente costruito presso Torino. È questo una torre alta 8 metri, a base quadrata su 0m,97 di lato; e mediante un canale di derivazione riceve le acque della Dora. Sul suolo, che trovasi alla base della torre, vi sono parecchi bacini che servono alla misura delle portate.

In queste sperienze eseguite dal conte Mengotti l'altezza dell'acqua sul livello del foro essendo sempre la stessa, le portate pel teorema di Torricelli dovevano essere proporporzionali alle aree delle luci. Ma comparando i numeri della 6ª colonna a quelli della 5ª si rileva che la differenza tra la portata teorica e la sperimentata è 0,75 di piedi cubico per la luce eguale a $\frac{1}{576}$ dell'area del fondo, e sale poi a 366 piedi cubici ossia a circa $\frac{2}{7}$ della portata teorica quando la luce diviene $\frac{1}{4}$ dell'area del fondo. In conseguenza perchè il teorema di Torricelli possa riguardarsi come l'espressione di un fatto, è necessario che la ragione della luce all'ampiezza del recipiente sia molto piccola.

120. Sappiamo che pel teorema di Torricelli la portata Q che durante il tempo t si ottiene da un recipiente inesausto, di cui a è l'altezza ed f la luce del foro, è data dall'equazione $Q = ft\sqrt{2ag}$. Or supponendo la luce scolpita in una sottile parete si trova che il valore calcolato di Q è costantemente di circa 0,3 maggiore di quello che risulta dal fatto sperimentale. Questa divergenza del fatto dall'indicazione del calcolo non poteva attribuirsi ad inesattezza del principio, poichè essa ha luogo anche nelle portate di piccole luci, per le quali regge la proporzione $Q : Q' = \sqrt{a} : \sqrt{a'}$, donde il teorema di Torricelli deriva come immediata conseguenza. D'altronde il fenomeno del *gorgo* scoverto da Bernoulli fece bentosto congetturare che le molecole del fluido, continuando oltre il foro a muoversi in direzioni convergenti, dassero alla vena liquida la forma di un cono troncato, di cui la base maggiore fosse l'area della luce *ab* (*fig.* 155), e la base minore si trovasse nella massima contrazione *cd*. Newton, che il primo conobbe il fatto della contrazione e la sua influenza sulla portata assegnò ai diametri *ab* e *cd* la ragione di $\sqrt{2} : 1$. Indi Poleni, Michelotti, Bossut, Eytelwein, ec. ottennero diverse ragioni, il cui valore medio è 0,8. E se i diametri sono come 8 a 10, le aree saranno nel rapporto di 64 a 100; e poichè il cilindro liquido equivalente alla portata deve avere per base la

vena contratta *cd*, eguale a 0,64 dell'area f del foro, perciò basterà moltiplicare il valore $ft\sqrt{2ag}$ per 0,64, perchè l'esperienza ed il calcolo coincidessero nello stesso risultamento.

La contrazione della vena liquida fu dapprima misurata direttamente, cercandone il diametro con un compasso di spessezza. Se le due punte del compasso distavano meno che non era il diametro della vena, uno sprizzo di acqua avvertiva l'osservatore che la misura era minore della vera; ma se la distanza delle punte eccedeva il diametro della vena, non era egualmente facile accorgersi dell'errore. Quindi fu preferita la misura indiretta che deduceva il valore della contrazione comparativamente all'area del foro, dividendo la portata sperimentale per quella assegnata dal calcolo; ma facilmente si comprende che questo metodo non è che un *circolo vizioso*, poichè suppone il teorema torricelliano indipendente dalla ragione dell'area della luce all'ampiezza del recipiente. Quindi le ricerche fatte con questo metodo da Poncelet e Lesbros a Metz per determinare l'influenza dell'area della luce e dell'altezza del liquido sovrastante sulla contrazione della vena, non hanno alcun valore logico.

121. La vena liquida si compone di due parti distinte, l'una limpida ed immobile come un pezzo di cristallo, l'altra agitata e torbida e che prima di dividersi in gocce presenta diverse espansioni e contrazioni, le quali osservandosi sempre allo stesso luogo fanno conoscere essere la stessa massa liquida quella che soffre periodici cangiamenti di forma. Savart, al quale si debbono interessanti ricerche sulla costituzione della vena liquida, osservando la parte agitata di una vena di mercurio, potè scorgere le linee che stavano sopra un foglio di carta situato dalla parte opposta: la continuità dunque della vena liquida è semplicemente apparente, ed essa è formata da gocce distinte, sottoposte ad un movimento di vibrazione, pel quale ora si allungano secondo l'asse, ora in direzione ad esso perpendicolare. Nè queste gocce si staccano dalla parte limpida della vena, ma prendono origine dall'orifizio stesso, ed a guisa di anello scorrono sulla vena limpida, finchè l'aumento progressivo del loro

volume non le obblighi a separarsi. La loro vibrazione può rendersi sensibile facendo percuotere la vena contro una membrana abbastanza tesa o altra lamina capace di vibrare, la quale rinforzandone l'effetto renderà possibile di prenderne l'unisono; e così si renderà manifesto che il numero delle vibrazioni è nella ragion diretta della celerità dello sgorgo, e nell'inversa del diametro del foro. L'ampiezza di queste oscillazioni può essere variata mediante un movimento vibratorio comunicato al recipiente sia per mezzo di un'azione immediata, sia per mezzo dell'aria ambiente. Allora succede nella vena un cangiamento considerevole: la parte limpida si accorcia di molto, e l'espansioni della parte torbida acquistano trasparenza e regolarità di forma. In una sperienza del Savart alla quale assisteva il Péclet, il suono di un violino, che per avventura si trovava unisono alla vena, quantunque sì lontano da essere appena sensibile, purtuttavia diminuì di oltre 10 centimetri la parte limpida della vena.

122. Fin'ora abbiamo supposto un vase inesausto: supponiamo ora un vase che per l'efflusso si vôta. Sia AB (*fig.* 156) un recipiente cilindrico o prismatico, pieno di acqua e che si scarica per l'orifizio *m*. Al cominciare dell'efflusso il liquido esce dal foro colla celerità dovuta all'altezza del recipiente; ma continuando il moto, la superficie di livello discende, l'altezza del liquido diminuisce, e con essa la celerità dell'efflusso. Or supponiamo un grave spinto lungo la verticale *fa*, eguale all'altezza del vase, con tal forza da pervenire in *a* come punto di massima elevazione; e per ottenere questo effetto è d'uopo che il grave parta da *f* (nº 26) colla velocità che avrebbe acquistato discendendo per tutta *af*: così in *e*, *d*. ec. avrà le velocità dovute alle altezze *ae*, *ad*. ec. Immaginando divise la verticale *af* e l'altezza CD del vase in parti eguali dalle orizzontali *sb*, *tc*, ec. osserviamo che quando il liquido era al livello AC, la vena fluiva colla celerità dovuta all'altezza CD $=$ *af*, ed in conseguenza eguale alla celerità iniziale del grave che parte da *b*: pervenuto il livello a *zs*, il liquido fluisce colla velocità dovuta all'altezza *s*D $=$ *bf*, e perciò eguale a quella del grave nel punto *e*; similmente

nello scendere del livello ai punti t, y, n, le celerità di efflusso, saranno eguali a quelle del grave nei punti d, c, b. Dunque la celerità di sgorgo da un vase verticale cilindrico o prismatico, che per l'efflusso si vôta, è uniformemente ritardata, come quella di un grave che per celerità impressa ascende verticalmente.

Dalla stessa legge della discesa verticale dei gravi si rileva ancora che se il grave nell'ascendere da f conservasse inalterata la velocità comunicata dalla forza d'impulso, si eleverebbe nello stesso tempo ad un'altezza doppia di fa. Ciò posto, se il vase prismatico è inesausto, il liquido esce dal foro m colla velocità costante v dovuta all'altezza del recipiente, e se una molecola del liquido conservasse la velocità di efflusso, percorrebbe nel tempo t lo spazio vt: ma se il vase si vôta, la celerità di efflusso è ritardata uniformemente, in conseguenza se tutte queste fasi di celerità avvenissero in una sola molecola, essa nello stesso tempo t dovrebbe percorrere uno spazio metà del primo, vale a dire $\frac{vt}{2}$. Or la portata di un recipiente equivale in volume ad un cilindro che avesse per base l'area di massima contrazione della vena, e per altezza la celerità di efflusso, la portata sarà dunque fvt pel vase inesausto, ed $\frac{fvt}{2}$ per quello che si vôta. Perciò durante il tempo che quest'ultimo si vôta, un recipiente prismatico eguale restando inesausto emetterebbe una quantità di liquido doppia di quella che può contenere; quindi chiamando b la base del prisma ed a l'altezza, il volume sarà espresso dal prodotto ab, e mentre che il vase prismatico votandosi emetterà il volume di acqua ab, l'altro inesausto darà nello stesso tempo t il volume di acqua $2ab$. Ma pei vasi inesausti la portata viene espressa da $0{,}64\ ft\sqrt{2ag}$ (n° 120); dunque per determinare il tempo t durante il quale un vase verticale prismatico si vôta, abbiamo la relazione

$$2ab = 0{,}64\ ft\sqrt{2ag},$$

donde
$$t = \frac{2b\sqrt{a}}{0{,}64f\sqrt{2g}}.$$

Per ottenere poi il tempo necessario a far discendere il livello fino ad una data profondità zs, chiamiamo t' il tempo che il vase impiegherebbe a vôtarsi se fosse pieno fino a zs; avremo

$$t' = \frac{2\, b \sqrt{a'}}{0{,}64\, f \sqrt{2g}};$$

e sottraendo t' da t, avremo il tempo θ della discesa da AC a zs per mezzo dell'equazione

$$\theta = \frac{2b}{0{,}64 f \sqrt{2g}} (\sqrt{a} - \sqrt{a'}).$$

Or se risolviamo quest'ultima equazione rispetto a $\sqrt{a'}$, e poi l'innalziamo a quadrato, avremo

$$a - a' = \frac{0{,}64 f t \sqrt{2g}}{b} \left(\sqrt{a} - \frac{0{,}64 f t \sqrt{2g}}{4b}\right),$$

per mezzo della quale espressione possiamo viceversa determinare la quantità $a - a'$, di cui sarà sceso il livello liquido durante il tempo t; e sopprimendo il divisore b al primo fattore del 2.° membro, avremo il volume liquido uscito durante lo stesso tempo.

L'uso di queste formole, considerate quanto alla realtà dei risultamenti, richiede ch'esse non si estendano fino a quella sezione del recipiente, nella quale il gorgo trasfórma la superficie piana del livello in una cavità conica. Limitando così la loro estensione, esse sono state abbastanza confermate dall'esperienza, come si rileva dalla seguente tavola, in cui sono notati i risultamenti ottenuti da Bossut con un vase prismatico a base quadrata di 0m,975 di lato, e che veniva riempito di acqua fino all'altezza di 3m,79 sul centro della luce.

Diametro dell'orifizio.	Abbassamento del livello.	Tempo dell'abbassamento secondo	
		l'esperienza	la formola.
metri.	metri.		
0,0271	3,92	20′, 25″	20′, 41″
0,0541	2,92	5′, 6″	5′, 10″
0,0541	1,30	1′, 52″	1′, 52″

123. La legge che per mezzo del teorema di Torricelli si è trovata per la celerità di efflusso, ed in conseguenza per la discesa della superficie di livello nei vasi cilindrici o prismatici che si vôtano, rende facile la costruzione delle *clessidre* [1] destinate alla misura del tempo, prima che si fossero inventati gli orologi meccanici. La prima quistione da risolversi per la costruzione di una clessidra è quella di determinare le dimensioni del recipiente, affinchè l'efflusso duri un dato numero di ore. Supponiamo che la clessidra debba essere cilindrica e col periodo di 12 ore. Abbiamo così tre dimensioni da conoscere, il diametro e l' altezza del cilindro ed il diametro della luce; e poichè queste tre quantità debbono soddisfare ad una sola condizione, così a due daremo valore ad arbitrio, e poi determineremo la terza. Facciamo il diametro del foro $= 0^m,002$, l'altezza del recipiente $= 1^m$, e cerchiamo il raggio x della base. Poichè l'unità di tempo di g è $1''$, riduciamo le 12 ore a secondi, ed avre-

[1] Clessidra in greco vuol dire *nasconde-acqua*. Si crede che questa specie di cronometro sia stata inventata dagli antichi Egizi; che l'usavano per le osservazioni astronomiche. Platone la fece conoscere ai Greci, e più tardi Scipione Nasica ai Romani. Si è detto ancora che Cesare mediante una clessidra trovata nella Gran Brettagna conobbe che le notti estive in quelle contrade sono più brevi che in Italia. In tempi a noi più vicini il celebre Ticone Brahe usava la clessidra nelle sue osservazioni sul moto degli astri.

mo 43200″; e determinando g per la latitudine di Napoli mediante la formola data a *pag.* avremo $g = 9{,}80225$. Sostituendo questi numeri nella formola $t = \frac{2b\sqrt{a}}{0{,}64f\sqrt{2g}}$, si ha

$$43200.0{,}32.0{,}001^{\cdot}\sqrt{19{,}60451} = x^2.$$

da cui si ottiene $x = 0^{m},2474$ che sarà il raggio della base del cilindro. Ottenute così le dimensioni della clessidra che impiegherà 12 ore per vôtarsi, bisogna dividerne l'altezza in 12 parti tali che la superficie del liquido impieghi un'ora per discendere dall'una all'altra. In un vase prismatico o cilindrico, quale abbiamo supposto la clessidra, la superficie di livello scenderà con movimento, uniformamente ritardato; poichè chiamando f l'area del foro, m la sezione del vase, v la velocità di efflusso per un dato istante, w la velocità corrispondente della superficie di livello, e dovendo la quantità di efflusso pareggiar la quantità di liquido mancata nel recipiente, avremo

$$mw = fv,$$

donde
$$m : f = v : w;$$

vale a dire che tra v e w deve esistere un rapporto costante, ed in conseguenza w deve variare nella stessa ragione di v. Perciò essendo 1 lo spazio percorso nella 12ª ora, quello della 11ª sarà 3, della 10ª 5, della 9ª 7, ec: dunque l'altezza della clessidra equivalerà alla somma dei primi 12 numeri dispari della serie naturale, la cui unità sarà lo spazio percorso nella 12ª ora. Or la somma dei primi 12 dispari è 144 [1]; quindi divideremo l'altezza

[1] La serie dei numeri dispari costituisce una progressione aritmetica, nella quale 1 e $2n-1$ sono il primo e l'n^{simo} termine. Per ciò applicando ai primi n dispari la formola $S = \frac{(a+u)\,n}{2}$, che rappresenta la somma di n termini di una progressione aritmetica di cui a ed u sono i termini estremi, avremo

$$S = \frac{(1+2n-1)\,n}{2} = n^2.$$

Dunque la somma dei primi n dispari è eguale al quadrato del numero n dei termini.

della clessidra in 144 parti eguali, e cominciando dalla superficie di livello ne prenderemo successivamente 23,21,19,17,...... 1, ed avremo gli spazî relativi alla 1.^{a}, 2^a, 3^a, 4^a,...... 12^a ora. Volendo poi oltre le ore segnare i quarti, bisognerà dividere l'altezza della clessidra in parti eguali $2303 = 48^2$, essendovi 48 quarti in 12 ore; e queste 2304 parti eguali distribuite nelle porzioni 95, 93, 91, 89, ec. segneranno gli spazî corrispondenti ai successivi quarti di ora.

124. Abbiamo appreso (n.° 27) che l'azione congiunta della gravità e di una forza d'impulso inclinata all'orizzonte farebbe percorrere al grave una parabola, se non ostasse la resistenza dell'aria. Questo principipio offre un nuovo criterio di realtà pel teorema torricelliano. Immaginiamo un vase tenuto costantemente pieno di acqua (*fig.* 157) e nella cui parete verticale sia scolpito un piccolo foro. Il liquido nell'uscire da questa luce si troverà sottoposto a due forze, l'una verticale ed è la gravità, l'altra orizzontale che produce una velocità d'impulso proporzionale alla radice quadrata della colonna liquida sovrastante. Chiamando x le altezze o *ascisse ac*, *am* ec, y le orizzontali o *portate ce*, *mn* ec. la teoria del movimento parabolico dei gravi [1] dimostra che tra le ascisse x e le portate y deve esistere la relazione $\frac{y^2}{x} = 4a$, a indicando l'altezza cui è dovuta la celerità prodotta dalla forza d'impulso; quindi nel getto di una vena ch'esce da luce verticale, il rapporto del quadrato della portata all'ascissa corrispondente dev'essere di 4 volte l'altezza del liquido sovrastante al foro, se il getto esce realmente colla celerità do-

[1] Facendo $gs = y$ (*fig.* 29), $bs = Ag = x$; e chiamando v la velocità impressa al grave secondo la retta Ac, e t il tempo ch'esso impiegherebbe a percòrrere la retta $Ab = y$, avremo $y = vt$. D'altronde se la sola gravità avesse agito, il grave nell'istesso tempo t avrèbbe percorso la verticale $Ag = x = \frac{gt^2}{2}$ (n.° 26). Eliminando t tra queste due eqùzioni si ha $y^2 = \frac{2v^2x}{g}$; ma $v^2 = 2ga$ (n.° 119); dunque $y^2 = 4ax$, e $\frac{y^2}{x} = 4\,a$.

vuta a questa medesima altezza. Michelotti sperimentando sopra un foro di 0m,0271 di diametro scolpito sulla parete verticale della sua torre, ha ottenuto i risultamenti che seguono.

ALTEZZA dell'acqua sul centro della luce.	GETTO		VELOCITA'	
	Ascissa.	Portata.	teorica.	reale.
2m,29	6m,28	7m,53	6m,70	6m,60
3 ,93	4 ,66	8 ,45	8 ,78	8 ,67
7 ,19	1 ,31	6 ,25	11 ,80	11 ,67

La colonna delle velocità teoriche della tavola precedente è data dalla formola $\sqrt{2ag}$ che suppone il teorema di Torricelli, l'altra delle velocità reali è data da $y\sqrt{\frac{g}{2x}}$ che rappresenta $\sqrt{2ag}$ nell'ipotesi che la velocità di proiezione sia dovuta a 4 volte l'altezza del liquido sovrastante al foro. Or l'essere le velocità reali costantemente minori delle teoriche è un nuovo argomento in favore del principio torricelliano, poichè la resistenza dell'aria tendendo a diminuire la portata del getto, ossia il valore di y, necessariamente $y\sqrt{\frac{g}{2x}}$ dev'essere minore di $\sqrt{2ag}$. A ciò si aggiunga che la differenza tra le due celerità si trova crescente coll'altezza del liquido che sovrasta al foro; vale a dire che la differenza aumenta colla celerità dell'efflusso, e perciò colla resistenza dell'aria.

Questa seconda pruova del teorema di Torricelli ci offre il mezzo di risolvere una rilevante quistione intorno allà portata delle luci. Finora le abbiamo supposto scolpite nel fondo orizzontale di un recipiente, o se le abbiamo immaginato su parete verticale vi abbiamo aggiunto la condizione di aver dimensioni piccolissime rispetto all'altezza del liquido sovrastante, e quest'altezza l'abbiamo misurata dal centro della luce. Ma se questa avesse dimensioni non piccole rispetto all'altezza del liquido, come

ac (*fig.* 158); allora le falde liquide zx, st ec. sarebbero a distanze diverse dalla superficie di livello db, ed avrebbero in conseguenza celerità differenti, le quali non altrimenti si possono introdurre nel calcolo che sotto forma di un valore medio equivalente. Or immaginiamo sul lato be del recipiente una serie di piccoli fori m, n ec.; e chiamando x le distanze variabili bm, bn ec. dalla superficie di livello, avremo le rispettive celerità di efflusso rappresentate da $y = \sqrt{2gx}$, ed $y^2 = 2gx$; vale a dire che se dai punti m, n, ec. conduciamo le orizzontali mm', nn', ec. eguali ai rispettivi valori di y, gli estremi m', n', ec. si troveranno sopra la curva parabolica bg. Perciò se invece di una serie di fori immaginiamo una fenditura verticale alta quanto il recipiente e di una larghezza b, da essa uscirà in 1″ una falda liquida che avrà la spessezza b, e sarà ampia quanto il segmento parabolico bge, ossia un prisma liquido che avrà per base questo segmento, e b per altezza. Ma la geometria insegna che l'area di questo segmento parabolico è eguale a $\frac{2}{3}\, be.ge = \frac{2}{3}\, a\sqrt{2ga}$, facendo $be = a$; dunque il volume liquido emesso in 1″ dalla fenditura be sarà espresso da $\frac{2}{3}\, ab\sqrt{2ag}$. E ciò nell'ipotesi che la luce avesse l'altezza del recipiente; ma se essa fosse minore, come quella di ac per esempio, allora per l'orlo superiore dell'orifizio immaginiamo condotta la orizzontale nn'; è chiaro che il volume liquido uscito in 1″ pareggerà un prisma che avesse per altezza $zx = b$, e per base $enn'g = beg - bnn' = \frac{2}{3}\, a\sqrt{2ag} - \frac{2}{3}\, a'\sqrt{2a'g} = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,(a\sqrt{a} - a'\sqrt{a'})$, facendo $bn = a'$. Cio posto chiamiamo v la velocità media del getto, e z l'altezza cui essa è dovuta, avremo

$$b\,(a - a')\sqrt{2gz} = \frac{2}{3}\, b\sqrt{2g}\,(a\sqrt{a} - a'\sqrt{a'}),$$

donde

$$z = \frac{4}{9}\left(\frac{a\sqrt{a} - a'\sqrt{a'}}{a - a'}\right)^2 \text{[1]}.$$

[1] Questa formola riguarda la sola luce rettangolare, la quale offre un

L'uso di questa formola è necessario, quando l'altezza del liquido sull'orlo superiore della luce, o il *battente* come dicono gl'Idraulici, è piccolo rispetto all'altezza del foro: nel caso opposto basta assegnare a z la distanza della superficie di livello dal centro di gravità della luce, per avere il valore della portata con sufficiente approssimazione.

L'espressione $b\,(a - a')\,\sqrt{2gz}$ per essere di accordo coi risultamenti dell'esperienza ha bisogno di un fattore che si ottiene dividendo la portata reale per la teoretica. Questo fattore è stato riguardato come ragione della vena contratta all'area della luce; ma questa considerazione, come abbiamo osservato nel principio di questo capo, per essere esatta richiede che il teorema di Torricelli sia indipendente dalla relazione dell'area del foro alla sezione del recipiente, ciò che l'esperienza non ha confermato. Qualunque intanto sia la veduta sotto la quale si voglia considerare il fattore dato dall'esperienza, il suo valore si mostra dipendente dall'altezza del foro e da quella dell'acqua sul ciglio della luce, come si rileva dalle ricerche eseguite da Poncelet e Lesbros, i cui risultamenti si leggono nella tavola seguente.

problema di facile soluzione. Nella nota (*I*) alla fine del volume il lettore troverà il metodo per determinare z, qualunque sia la forma della luce, purchè simmetrica rispetto ad una retta verticale.

ALTEZZA sul centro della luce.	ALTEZZA DELLE LUCI.					
	0m,20	0m,10	0m,05	0m,03	0m,02	0m,10
0,01						0,712
0,02				0,644	0,667	0,700
0,03				0,644	0,663	0,693
0,04			0,624	0,643	0,661	0,685
0,05			0,625	0,643	0,660	0,682
0,06		0,611	0,627	0,642	0,658	0,678
0,08		0,612	0,628	0,640	0,657	0,671
0,10		0,613	0,630	0,638	0,655	0,667
0,12	0,592	0,614	0,631	0,637	0,654	0.664
0,15	0,597	0,615	0,631	0,635	0,653	0,660
0,20	0,599	0,616	0,631	0,634	0,650	0,655
0.30	0,601	0,617	0,631	0,632	0,645	0,650
0,40	0,603	0,617	0,631	0,631	0,642	0,647
0,50	0,605	0,617	0,631	0,630	0,640	0,643
0,70	0,604	0,616	0,629	0,629	0,637	0,638
1,00	0,605	0,615	0,627	0,627	0,632	0,627
1,30	0,604	0,613	0,623	0,623	0,625	0,621
1,60	0,602	0,611	0,619	0,619	0,618	0,616
2.00	0,601	0,607	0,613	0,613	0,613	0,613
3,00	0,601	0,603	0,606	0,607	0,608	0,609

N. B. Tutte le luci erano rettangolari ed avevano $0^m,20$ di base.

I numèri contenuti in questa tavola dimostrano che il fattore d'aggiungersi alla formola aumenta, come diminuisce la luce e l'altezza dell'acqua sovrastante; ma che vi è un limite di altezza che tende a rendere il fattore indipendente dall'ampiezza della lùce.

Finalmente rispetto agli efflussi laterali osserviamo che quando l'acqua nel recipiente poco si eleva sul ciglio della luce, la superficie di livello si trova depressa in vicinanza del foro (*fig.* 159) formando la convessità *st*. Fu già osservato da Mariotte che per una luce circolare di un pollice di diametro se l'acqua si eleva di una linea sul ciglio della luce, in mezzo al recipiente la superficie di livello è realmente elevata di due linee. In tal caso per l'applicazione della formola sopra esposta è d'uopo che l'altezza si misuri da qualche punto della superficie non ancora inflessa.

125. Negli emissarî o scaricatori a fior d'acqua gl'Idraulici non hanno veduto che una forma speciale di luce laterale; e perciò ne hanno calcolato la portata dietro i medesimi principî; ma non sono stati poi di accordo nel mettere a calcolo l'effetto dovuto all'inflessione *ms* (*fig.* 160) che il pelo dell'acqua riceve prossimamente alla luce dell'emissario. Taluni considerando che le molecole alla superficie giungono in *s* colla velocità dovuta all'altezza *ns*, hanno riguardato l'effetto dell'inflessione come equivalente a quello di un battente *ns* che chiudesse superiormente la luce dell'emissario; e che in conseguenza il valore della portata dev'essere espresso dall'equazione

$$Q = \frac{2}{3}\, mb\sqrt{2g}\,(a\sqrt{a} - a'\sqrt{a'}).$$

nella quale m è il coefficiente per la contrazione della vena, a ed a' rappresentano le due altezze *mo* ed *ns*.

Altri poi considerando che la vera altezza della luce è la distanza massima *mo* del pelo dell'acqua dall'orizzontale condotta per la soglia dell'emissario, hanno soppresso il termine $a'\sqrt{a'}$, nella formola precedente; e le sperienze fatte primieramente in Italia da Bedone, indi in Francia da Poncelet, Castel ec. hanno dimostrato che la formola priva del termine $a'\sqrt{a'}$ è più conforme ai risultamenti sperimentali. Purtuttavia componendo la formola sia di un modo sia dell'altro, i valori di m non sono costanti; e la loro varietà fa sì che nella pratica non possono usarsi con piena fiducia, se non che nel caso di un emissario che si trova soddisfare alle stesse condizioni di quello pel quale si è ottenuto un dato valore di m.

Del resto queste formole suppongono che la massa dell'acqua precedente all'inflessione *ms* sia in riposo; ma ordinariamente essa ha un movimento, e talvolta considerevole, alla cui velocità media u si è attribuito lo stesso effetto che si otterrebbe aumentando l'altezza $mo = a$ della quantità $\frac{u^2}{2g} = 0{,}115u^2$. Ma questa velocità media essendo ignota, gl'Idraulici vi hanno

sostituito la velocità w della superficie, e la formola della portata è divenuta

$$Q = \frac{2}{3}\, mb\sqrt{2g\,(a + 0{,}115w^2)},$$

la quale ha dato ancora diversi valori per m.

Se mal non ci apponiamo, ci sembra che nel calcolo delle portate degli emissari a fior d'acqua le conseguenze del teorema di Torricelli sono state spinte troppo oltre dagl'Idraulici; e che volendo lasciare alla formola la composizione derivata dal teorema, non era mestieri aggiungervi ancora la condizione dei valori definiti $\frac{2}{3}$, $\sqrt{2g}$, e 0,115. Sarebbe forse stato più conforme alla natura delle funzioni empiriche ridurre la formola ad $\alpha\, b\sqrt{(a + \beta w^2)}$, per ottenere poi dall'osservazione i valori di α e β.

126. Se alla luce scolpita nella parete di un recipiente fosse aggiunto un tubo cilindrico o conico, l'esperienza ha dimostrato che la portata non sarebbe più quella che veniva dall'efflusso per la semplice luce.

Se il tubo addizionale è cilindrico e lungo due o tre volte il diametro del foro, e che il liquido esce riempiendo tutto l'orifizio del cannello, l'esperienza ha fatto conoscere che il fattore necessario a rendere la portata teoretica eguale all'effettiva dev'essere 0,82; vale a dire che la portata è aumentata per l'addizione del cannello cilindrico.

Per trovare la ragione di questo aumento di portata bisogna premettere il seguente teorema dovuto a Daniele Bernoulli: *la pressione che un liquido esercita sulla parete di un tubo pel quale si muove, è eguale all'altezza effettiva del liquido sovrastante, meno quella che produrrebbe la celerità del movimento.* Chiamiamo a l'altezza del liquido sopra una data sezione del tubo, x quella a cui sarebbe dovuta la velocità v della vena che passa per quella data sezione; il teorema di Torricelli ci dà

$x = \frac{v^2}{2g}$. Chiamiamo poi p la pressione fatta sulla stessa sezione, avremo pel teorema di Bernoulli

$$p = a - \frac{v^2}{2g}.$$

Quindi se $\frac{v^2}{2g}$ fosse maggiore di a, p sarebbe negativa, vale a dire che la pressione si trasformerebbe in un'aspirazione da fuori in dentro. E viceversa se in un punto della parete di un tubo percorso da un liquido si appalesa una simile aspirazione, sarà questa una pruova che il liquido nella sezione del tubo corrispondente a quel dato punto ha una velocità maggiore di quella dovuta all'altezza del liquido sovrastante.

Ciò posto, veniamo ad un esperimento del Venturi. Questi adattò ad un recipiente un tubo cilindrico *bc* (*fig.* 161) lungo 0m,122, largo 0m,0406; e pel punto *a* distante di 0m,018 dalla sua origine lo pose in comunicazione con un cannello ricurvo di vetro che pescava coll'altro estremo nel vase *v* contenente acqua colorata. L'efflusso avveniva sotto la pressione di una colonna liquida alta 0m,88; e l'acqua colorata si elevava nel cannello di vetro di 0m,65. Dunque a 0m,018 dall'origine del tubo vi era un'aspirazione, ed in conseguenza pel teorema di Bernoulli l'efflusso aveva luogo con una celerità maggiore di quella dovuta all'altezza del liquido nel recipiente. Or questa celerità aumentata era eguale a quella che si sarebbe avuta, se all'altezza del liquido sul centro della luce si fosse aggiunta quella dell'acqua colorata nel cannello di vetro. Ed in vero lo stesso Venturi ha osservato che se nelle condizioni sopra dette l'efflusso avveniva senza l'addizione del tubo, si avevano 0,137 di metro cubico di acqua in 41″, mentre coll'addizione del tubo la stessa portata si aveva in 31″. Chiamando x la quantità di cui doveva aumentarsi l'altezza di 0m,88 che l'acqua aveva nel recipiente, affinchè la celerità fosse aumentata nel rapporto inverso del tempo, ossia come 41 a 31, il teorema di Torricelli ci offre per la determinazione di x la proporzione

$$41 : 31 = \sqrt{0{,}88 + x} : \sqrt{0{,}88},$$

dalla quale si ha $x = 0^m,66$ che supera soltanto di $0^m,01$ il dato sperimentale.

Si era da taluni opinato che l'aspirazione del tubo addizionale provvenisse da una diminuzione nella contrazione della vena. Ma il Venturi ha messo in chiaro l'insussistenza di questa ipotesi col seguente fatto. Al foro del recipiente disopra indicato egli adattava il tubo conico *abec* (*fig.* 163) che aveva le stesse dimensioni della vena contratta, ed aveva in 41″ la stessa portata di 0,137 di metro cubico che aveva ottenuto dalla luce senza tubo: indi aggiungeva il secondo tubo *begh*, ed aveva la stessa portata in 31″, non altrimenti che se il tubo fosse stato interamente cilindrico. Or la forma del cannello *aghc* non permetteva veruna diminuzione nella contrazione della vena, ed intanto aveva luogo lo stesso aumento di portata.

Per meglio dichiarare la cagione che accelera il liquido nel tubo addizionale, è d'uopo premettere che l'aumento di portata va sempre congiunto ad un getto pieno, ossia ad un getto che occupa nell'efflusso tutto il diametro del tubo: la qual condizione per esser soddisfatta, è necessario non solamente che il liquido sia capace di bagnare la superficie del tubo, ma che l'adesione non sia turbata da cagione meccanica. Così non vi è adesione, nè aumento di portata per la vena di mercurio che esce per un tubo di ferro, o per la vena di acqua che fluisce da un tubo la cui faccia interna sia stata unta di sego o intonacata di cera: al contrario Hachette ebbe un getto pieno di mercurio da un tubo di ferro, la cui faccia interna era stata coverta con amalgama di zinco. E quantunque il liquido sia capace di bagnare il tubo, purtuttavia l'effetto può essere impedito da una cagione meccanica. Venturi scolpì dodici fori sulla sezione media di un tubo addizionale; e la vena liquida lo percorreva senza lambirne le pareti, poichè l'aria esterna urtandola nell'accorrere all'aspirazione, impediva che vi aderisse: indi chiuse successivamente undici fori, ma bastò il solo dodicesimo a far sì che l'adesione non avesse luogo. Hachette è pervenuto ancora a separare la vena dalla parete interna del tubo, accrescendo l'altezza dell'acqua sulla luce

di erogazione: così l'aumento di celerità che le molecole ricevevano parallelamente all'asse del tubo, le rendeva meno proclivi alla forza di adesione che le sollecitava in direzioni perpendicolari alla prima.

Conosciuta l'aspirazione che ha luogo in un tubo addizionale, conosciuta l'influenza dell'aria nel separare la vena dal tubo, Venturi conchiuse che l'aumento di portata era l'effetto immediato della pressione atmosferica, la quale accorrendo a riempire il vôto prodotto nel tubo, vi spingeva il liquido dal recipiente con forza maggiore; ma se fosse così, l'aria sarebbe accorsa eziandio per la luce del tubo, ed il liquido tra le due forze meccaniche eguali e contrarie, avrebbe conservato la velocità dovuta all'altezza; al che aggiungiamo che Hachette ha ottenuto i fenomeni dei tubi addizionali nel vôto pneumatico.

La cagione immediata dell'aumento di portata pare che sia la seguente. L'esperienza ci ha fatto conoscere che la presenza del tubo addizionale non altera la contrazione della vena; l'adesione dunque alla parete del tubo non può aver luogo se non dopo compiuta la massima contrazione. L'adesione comincerà da quei filetti liquidi, i quali situati sulla faccia convessa della vena si avviano per linee divergenti dopo aver toccato la massima convergenza nel luogo della più grande contrazione. Questi primi filetti aderendo alla parete, chiamano a se i più vicini, questi gli altri che seguono dappresso, e così il movimento di espansione per la forza di coesione delle particelle liquide si diffonde dalla superficie all'asse della vena; e poichè nella coesione del liquido sta la ragione della continuità della vena, così il movimento verrà comunicato all'intera massa, e le particelle del liquido percorreranno la sezione minima della vena contratta con una velocità maggiore di quella che sarebbe dovuta all'altezza del liquido sovrastante.

I tubi conici, la cui base maggiore circonda la luce del recipiente, aumentano la portata più dei tubi cilindrici, e questo aumento dipende dall'accresciuta celerità di efflusso, come si rileva dalla tavola seguente, che contiene i risultamenti ottenuti da Castel con un suo speciale apparecchio messo in azione alla

dispensa d'acque di Tolosa. Egli operava con due serie di tubi di ottone, l'una aveva la lunghezza di 0m,04 e 0m,0155 per diametro della piccola base, e nella seconda serie le analoghe dimensioni erano 0m,05 e 0m,02. L'angolo di convergenza dei lati del cono era per ogni tubo, quale si legge nella tavola; e la velocità di efflusso era misurata per mezzo della portata di un getto parabolico, come si è detto al n°. 124.

Serie del diametro 0,0155			Serie del diametro 0,02		
ANGOLO di convergenza.	COEFFICIENTE della portata.	COEFFICIENTE della velocità.	ANGOLO di convergenza.	COEFFICIENTE della portata.	COEFFICIENTE della velocità.
0° 0'	0,829	0,830	2° 50'	0,914	0,906
1 36	0,866	0,866	5 26	0,920	0,928
3 10	0,895	0,894	6 54	0,938	0,938
4 10	0,912	0,910	10 30	0,945	0,953
5 26	0,914	0,920	12 10	0,949	0,957
7 52	0,929	0,931	13 40	0,956	0,964
8 58	0,934	0,942	15 2	0,949	0,967
10 20	0,938	0,950	18 10	0,939	0,970
12 4	0,942	0,955	23 4	0,930	0,973
13 24	0,946	0,962	33 52	0,920	9,979
14 28	0,941	0,966			
16 36	0,938	0,971			
19 28	0,924	0,970			
21 0	0,918	0,971			
23 0	0,913	0,974			
29 58	0,896	0,975			
40 20	0,869	0,980			
48 50	0,847	0,954			

Dai numeri contenuti in questa tavola si rileva — 1.° che i tubi conici danno una portata maggiore dei cilindrici — 2.° che la portata aumenta coll'angolo di convergenza fino a circa 13¾, ove si trova un massimo — 3.° che aumentando il medesimo angolo, la velocità di efflusso cresce indefinitamente, dimodochè perverrebbe ad eguagliare la velocità teoretica a 180°. Questo continuo aumento di celerità, mentre la portata offre un massimo

a 13%, dimostra che la vena liquida patisce una seconda contrazione nell'uscire dal tubo, e tale da non poter essere compensata dall'accresciuta velocità.

Maggiore aumento di portata si ottiene da tubi conici divergenti, ossia da tronchi di cono uniti alle luci dei recipienti per le basi minori. Venturi sperimentando sopra tubi di questa forma, ha trovato che la massima portata ha luogo, quando la lunghezza del tubo è 9 volte il diametro della base minore, e che l'angolo di divergenza è 5° 6′. In questo caso si ottiene una portata che sta alla teoretica nella ragione di 1,46 a 1, ed a quella delle luci scolpite in sottili pareti nella ragione di 2,4 a 1. Questa proprietà dei tubi conici divergenti era nota agli antichi Romani, che ne usavano quando veniva loro concesso di togliere una certa quantità di acqua da quelle destinate ad uso pubblico; e conosciuta la frode una legge prescrisse a quale distanza dal serbatoio potessero tali tubi applicarsi.

127. Dalle leggi della discesa verticale dei gravi sappiamo (n° 26) che se un corpo ad un punto qualunque della sua caduta avesse in opposta direzione la velocità che possiede in quel punto, esso salirebbe all'altezza donde è disceso. Da questo principio segue che se alla base di un recipiente B (*fig.* 162) situato in alto, adattiamo il tubo verticale *s* che voltato a sifone abbia l'orifizio del braccio corto chiuso da sottile lamina nella quale sia scolpita la luce *m*; l'acqua contenuta in B dovrà, pel teorema di Torricelli, produrre un getto verticale alto quanto il livello dell'acqua nel recipiente. Con un apparecchio simile Mariotte ha eseguito gli sperimenti notati nella tavola seguente. Il recipiente era un cilindro di 0m,325 di diametro; il tubo *s* di una lunghezza che Mariotte accrebbe successivamente fino a 20m, aveva il diametro di 0m,081; e 0m,0135 era il diametro della luce circolare *m* scolpita in sottile lamina.

ALTEZZA		DIFFERENZA	RAGIONI		FATTORI dei quadrati delle altezze.
dell' acqua sulla luce del foro.	del getto.		della diminuzione dei getti.	dei quadrati delle altezze dell'acqua.	
m.	m.	m.			
11,50	10,39	1,110	1,000	1,000	0,0084
11,35	10,30	1,056	0,931	0,974	0,0082
8,48	7,87	0,609	0,549	0,543	0,0085
7,93	7,42	0,515	0,464	0,476	0,0082
4,01	3,90	0,108	0,098	0,121	0,0068
1,79	1,75	0,034	0,031	0,024	0,0106

Le due prime colonne di questa tavola dimostrano che il getto non perviene all'altezza dell'acqua nel recipiente; e la terza colonna ne mostra la differenza. La colonna poi intitolata RAGIONI presenta nella linea a sinistra numeri proporzionali alle differenze dei getti, ed in quella a destra numeri proporzionali ai quadrati delle altezze dell'acqua nel recipiente; ed osservandosi piccole differenze tra le due serie di numeri, si conchiude che la differenza tra l'altezza dell'acqua nel recipiente e quella del getto è sensibilmente proporzionale al quadrato della prima altezza. Il fattore che stabilisce questa proporzionalità è dato dall'ultima colonna; ed il suo valore medio è 0,0084. Perciò chiamando a l'altezza dell'acqua sulla luce del foro, ed a' quella del getto, avremo prossimamente.

$$a' = a - 0,0084\, a^2.$$

In questi sperimenti di Mariotte era trascurabile la perdita di velocità che l'acqua soffriva nel percorrere il tubo fino alla luce del getto. Ma se la lunghezza del tubo fosse tale da rendere sensibile l'effetto della sua resistenza, allora dal valore dell'altezza dell'acqua sulla luce di erogazione bisognerebbe sottrarre l'altezza a cui è dovuta la velocità consumata dalla resistenza del tubo; ed il residuo sarebbe il valore di a nella formola precedente.

Fatta questa correzione nel dato sperimentale, la cagione che produce la differenza tra l'altezza dell'acqua nel recipiente e quella del getto non può cercarsi altrove che nella pressione che pel movimento ritardato la porzione superiore del getto produce sull'inferiore, e nella resistenza dell'aria che il getto deve vincere. Che la parte superiore del getto graviti sull'inferiore e ne diminuisca la celerità, questo è dichiarato dalla seguente sperienza di Bossut. Da un dato recipiente egli otteneva un getto verticale di $3^m,42$; che vide poi elevato a $3^m,47$ dopo averlo leggermente inclinato all'orizzonte, dimodochè per l'inflessione del movimento parabolico che ne risultava, le molecole superiori non ostavano più all'ascensione delle inferiori.

L'effetto poi della resistenza dell'aria è dichiarato dal fatto che a dati eguali si elevano più i getti che hanno maggior diametro; vincendo essi più facilmente la resistenza opposta dall'aria, perchè la loro massa aumenta più rapidamente della loro superficie a cui la detta resistenza è proporzionale. Eccone le pruove.

Altezza dell'acqua nel recipiente.	*Diametro del foro.*	*Altezza del getto.*	*Osservatori*
$3^m,57$	$0^m,018$	$3^m,42$	Bossut.
	$0^m,0045$	$3^m,26$	
$7^m,93$	$0^m,0135$	$7^m,42$	Mariotte
	$0^m,0068$	$7^m,20$	

L'esperienza ha dicharato ancora, come si rileva dai numeri che seguono, che la relazione tra l'altezza del getto e quella dell'acqua nel recipiente diminuisce come cresce l'altezza dell'acqua sulla luce del foro, vale a dire come aumenta la celerità dell'efflusso. Questo risultamento offre novella pruova della resistenza che l'aria oppone alle acque zampillanti, essendo noto che la resistenza di un mezzo aumenta secondo una certa ragione della celerità del mobile che lo percorre.

Esperienza di Mariotte.

Diametro del foro.	*Altezza dell'acqua nel recipiente.*	*Altezza del getto.*	*Differenza*
$0^m,00226$	$1^m,46$	$1^m,30$	$0^m,16$
	$4^m,55$	$3^m,58$	$0^m,97$
	$8^m,80$	$6^m,50$	$2^m,30$

Tutte queste sperienze sono state eseguite sopra luei circolari in sottili pareti. Queste luci, oltre a dare un getto unito da sembrare un cilindro di cristallo, lo elevano alla massima altezza, poichè la loro celerità di efflusso è senza veruna diminuzione dovuta all'altezza del liquido sovrastante. Minore altezza di getto si ottiene dai tubi conici, i quali diminuiscono, com'è noto (n°126) la velocità di efflusso; ma hanno poi comune colle luci circolari l'altro vantaggio di un getto limpido ed unito. I tubi cilindrici poi sono quelli che meno convengono, poichè ad una maggiore diminuzione di celerità aggiungono lo svantaggio di separare i filetti liquidi fin dall'origine dell'efflusso, e producono in conseguenza un getto torbido ed ineguale.

CAPO SECONDO

Movimento dell'acqua nei tubi, e nei canali.

128. Immaginiamo un tubo orizzontale assai lungo adattato alla luce laterale di un recipiente inesausto, e che dopo un efflusso durato per un tempo definito da un orologio a secondi, si misuri la quantità della portata. Dividendo questo valore della portata per l'area di sezione del tubo ridotta secondo la ragione della vena contratta, il quoziente esprimerà la lunghezza del cilindro liquido che durante quel tempo è passato pel tubo; e dividendo la lunghezza ottenuta pel numero dei secondi che ha durato il movimento, si avrà la velocità di efflusso. Chiamando v questa velocità, l'altezza cui sarà dovuta verrà espressa da $\frac{v^2}{2g}$ il quale numero comparato a quello che rappresenta l'altezzo A

del livello dell'acqua sul centro della luce, si troverà sempre più piccolo, come la lunghezza del tubo aumenta sotto una stessa sezione, ovvero come questa diminuisce, lasciando la lunghezza costante.

Se la sostanza del tubo è incapace di essere bagnata dal liquido che lo percorre, la diminuzione di celerità è un effetto dell'attrito del liquido sulla faccia interna del tubo, come dichiarano le due condizioni che rendono più grande la differenza $A - \frac{v^2}{2g}$. Ed in vero aumentando la lunghezza del tubo sotto una medesima sezione, aumenta la durata dello strofinio, e quindi il consumo della velocità impressa dall'altezza dell'acqua sovrastante alla luce del vase; e quando per una medesima lunghezza diminuisce il diametro della sezione, deve scemare ancora la velocità dell'efflusso, poichè il consumo di celerità prodotto dall'attrito dovrà ripartirsi sopra una massa proporzionatamente minore [1], e quindi ogni molecola del liquido ne avrà una parte maggiore. Questo aumento di attrito comparativamente al diametro del tubo può giungere ad equilibrare l'intera velocità dovuta all'altezza del liquido nel recipiente; così il mer-

[1] La Geometria insegna che i volumi dei cilindri di eguali altezze variano come i quadrati dei raggi delle loro basi; e secondo la semplice ragione di questi raggi variano poi le loro superficie convesse. In conseguenza se la quantità totale di attrito decresce secondo l'estensione della parete interna del tubo, ossia secondo il diametro della sezione, il volume del liquido che occupa il tubo diminuendo come il quadrato del diametro, e perciò secondo una ragione più rapida della diminuzione della superficie, farà sì che nella ripartizione della perdita, ogni molecola del cilindro liquido ne avrà una parte più grande. Supponiamo un tubo, il quale con un diametro che facciamo $= 1$, presenti una resistenza ω nell'attrito del liquido. Chiamando n il numero delle molecole del volume liquido contenuto nel tubo, $\frac{\omega}{n}$ sarà la resistenza che ciascuna di esse dovrà vincere. Se immaginiamo che il diametro del tubo divenga $\frac{1}{2}$, la resistenza totale sarà $\frac{\omega}{2}$, che ripartita al numero di molecole $\frac{n}{4}$ darà a ciascuna $\frac{2\omega}{n}$, quantità doppia della prima.

curio sotto una pressione di 9mm,5 cessa di scorrere in un tubo di vetro lungo 375mm e del diametro di 1mm,12.

L'attrito, di cui parliamo, è quell'ostacolo che un liquido incontra movendosi sopra una superficie incapace di esserne bagnata; ed il suo valore deve necessariamente avere una certa dipendenza dalla natura del liquido e da quella del solido. Non è lo stesso dei liquidi che bagnano le pareti interne dei tubi: essi scorrono sopra un velo liquido attaccato alla stessa parete, e non debbono vincere se non la coesione tra la faccia esterna del cilindro liquido in movimento e la faccia interna del velo liquido già attaccato alla parete solida. Da ciò si rileva la ragione per la quale l'acqua sotto una certa pressione non arresta il suo movimento in un tubo orizzontale di vetro per quanto ne sia piccolo il diametro; poichè la sua adesione al vetro tendendo continuamente ad espanderla nell'interno del tubo, ne conserva il movimento quantunque piccolissimo. Per la stessa ragione la viscosità dei liquidi, la quale tra certi limiti ne aumenta l'adesione ai solidi senz'aumentarne la coesione, in vece di ritardare il movimento dei liquidi nei tubi capillari, sovente l'accelera: così l'esperienza ha dichiarato che a dati eguali l'acqua zuccherata patisce minor perdita di velocità dell'acqua semplice, e questa meno che l'alcool. Per non aver posto mente a questa distinzione gl'Idraulici hanno considerato l'attrito tra un liquido ed un solido che ne resta bagnato; e per ciò non reca meraviglia che Dubuat abbia trovata la resistenza dell'acqua indipendente dalla pressione e dalla natura dei solidi su cui si muove, come vetro, piombo, stagno, ferro, legno, e diverse specie di terre.

Finalmente dall'esperienza si è rilevato che la resistenza che l'acqua incontra nel percorrere un tubo dipende ancora dalla sua celerità: e discutendo molti risultamenti sperimentali si è trovato che questo terzo elemento di resistenza è proporzionale al quadrato della velocità, più una fraziono della stessa. Perciò chiamando L la lunghezza, C il perimetro della sezione, S l'area di questa ed a e b due coefficienti costanti da determinarsi; la

resistenza del tubo espressa in altezza produttrice della velocità perduta, sarà data dall'equazione

$$A - \frac{v^2}{2g} = a \frac{CL}{S} \left(v^2 + bv \right)$$

I valori di a e b determinati per la prima volta da Prony, furono poi modificati per le ricerche di Eytelwein, ed in fine di Couplet; e D'Aubuisson De Voisins, stando alle ricerche più esatte, stabilisce $a = 0{,}0003425$ e $b = 0{,}055$.

Perchè la sezione di un tubo è sempre circolare, potremo (chiamandone D il diametro) sostituire πD al perimetro C, e πD^2 all'area di sezione S; e l'equazione precedente diverrà

$$A - \frac{v^2}{2g} = a \frac{L}{D} \left(v^2 + bv \right) \qquad (a)$$

la quale risoluta rispetto a v ci dà

$$v = \frac{1}{D + 2gL} \left(\sqrt{(gbL)^2 + 2\,ADg\,(D + 2gL)} - gbL \right).$$

Purtuttavia nelle applicazioni della formola (a) alla dispensa delle acque la velocità non è mai richiesta, ma bensì la portata, la quale per l'unità di tempo sarà $Q = \pi D^2 v$; donde $v = \frac{Q}{\pi D^2}$. Sostituendo questo valore nell'equazione (a) si ottiene l'altra

$$A - \frac{Q^2}{2\pi^2 D^4 g} = a \frac{L}{D} \left(\frac{Q^2}{\pi^2 D^4} + b \frac{Q}{\pi D^2} \right),$$

la quale farà conoscere la portata Q, quando sono dati A, L e D.

Sappiamo che nei tubi capillari formati di sostanza capace di essere bagnata dal liquido introdotto, il movimento giammai si arresta. Ma la relazione espressa dalla formola precedente tra la portata, la lunghezza ed il diametro del tubo cesserebbe di aver luogo, poichè l'efflusso non è più uniforme ma a

salti, formandosi all'orifizio del tubo una goccia la quale gradatamente ingrossando, non cade prima che il suo peso sia divenuto superiore alla sua coesione; e perciò secondo la temperatura, l'evaporazione più o meno celere, ec. varierà la quantità della portata. Poiseuille cui si debbono interessanti ricerche sul movimento dei liquidi nei tubi capillari, è giunto ad eliminare l'azione perturbatrice di un efflusso interrotto, circondando l'orifizio del tubo con una massa dello stesso liquido, dimodochè il tubo capillare non faceva che stabilire una comunicazione tra due recipienti che contenevano il liquido sotto diverse pressioni. L'apparecchio all'uopo inventato si componeva di un recipiente AB (*fig.* 164) al quale era aggiunto il tubo D di rame, comunicante con tre altri tubi, ciascuno dei quali aveva una chiave. Ad uno di questi tubi veniva adattata una tromba comprimente, che doveva produrre la pressione di efflusso; il secondo dei tubi comunicava con un manometro, che valutava la pressione; ed il terzo menava ad una camera di rame, capace di circa 60 litri, nella quale veniva compressa l'aria che doveva spingere il liquido nel tubo capillare. Al recipieute AB era saldato in *c* il tubo *ce* interrotto dall'ampollina H, e congiunto in *e* al tubo capillare *ef* sul quale si voleva sperimentare. Per mezzo di una tromba aspirante adattata al tubo D si faceva penetrare il liquido pel tubo capillare *ef* fino al recipiente AB; indi si toglieva la tromba, ed il tubo D si metteva in comunicazione col sistema dei tre tubi sopra descritti, essendo l'aria già compressa nella camera di rame. Lasciando immerso nel liquido il tubo capillare *ef*, si metteva il recipiente AB in comunicazione coll'aria compressa; e mediante un cannocchiale orizzontale, il cui asse era diretto al punto di mira *m* si attendeva l'istante in cui il liquido scendendo per l'azione dell'aria compressa, toccava colla superficie di livello il punto *m*. Nel medesimo istante si metteva in movimento un pendolo a secondi; e si numerava il tempo che il liquido impiegava per giungere in *n*. Si notava ancora la temperatura del liquido e la pressione sotto cui era avvenuto l'efflusso. Chiamando L la

lunghezza del tubo capillare *ef*, D il suo diametro, P la pressione in millimetri di mercurio, T la temperatura, e Q la portata in millimetri cubi, i risultamenti delle sperienze fatte dal Poiseuille sono comprese nella formola empirica

$$Q = 1836{,}724\ (1 + 0{,}0336773T + 0{,}0002209936T^2)\ \frac{PD^4}{L}$$

129. Il movimento dell'acqua nei canali presenta dei fenomeni che si possono facilmente coordinare all'azione della gravità e delle forze molecolari. Il canale, ch'è opera dell'uomo, si distingue dal fiume, perchè ha costante la sezione, ed il fondo egualmente inclinato in tutta la lunghezza, o per una gran parte almeno. Sia *ab* (*fig.* 165) una retta tirata sul fondo di un canale parallelamente alle sponde, e siano condotte la verticale *ac* e l'orizzontale *bc*, il rapporto $\frac{ac}{ab}$ rappresenterà la pendenza *p* del fondo.

Ciò posto, supponiamo la superficie liquida parallela a quella del fondo, come suole avvenire quando il corso dell'acqua è stabilito in un canale di pendìo costante. Immaginando la massa liquida divisa in tante falde parallele al fondo, sopra ciascuna di esse la componente della gravità parallela alla superficie sarà $g\ \frac{ac}{ab} = gp$: ogni molecola dunque sarà sottoposta ad una forza acceleratrice, ed intanto l'esperienza dichiara che il movimento dell'acqua in un canale a pendìo costante diviene bentosto uniforme. Bossut facendo scorrere dell'acqua in un canale lungo 200m, colla pendenza di 0,1, sulla cui lunghezza aveva segnato delle divisioni di 33 metri, ha trovato che eccetto la prima tutte le altre erano percorse nello stesso numero di secondi. Quindi bisogna dire che la resistenza incontrata dal liquido sulle pareti del canale giunse bentosto ad eguagliare l'intensità della forza acceleratrice, e perciò il movimento divenne uniforme.

Se il liquido bagna la superficie, cui viene a contatto, la resistenza che incontra nel suo movimento non ha veruna analogia coll'attrito: essa sarà prodotta dalla perdita di forza motrice che

il volume liquido in movimento soffre nel vincere la coesione che l'unisce a quel velo dello stesso liquido restato aderente alla superficie del canale. Ed è facile comprendere che questa speciale resistenza debba essere in ragione diretta del contorno bagnato della sezione, in ragione inversa della sua area, e dipendente ancora dalla celerità del moto. Chiamando c il contorno bagnato, s l'area della sezione, e componendo di due termini la funzione empirica della celerità v, che dev'essere elemento della resistenza, questa sarà rappresentata da $a \frac{c}{s}(v^2+bv)$ a e b essendo due costanti da determinarsi. In conseguenza il moto dell'acqua in un canale diverrà uniforme, quando il valore della resistenza eguaglierà la forza acceleratrice gp, ossia quando sarà soddisfatta l'equazione

$$gp = a \frac{c}{s}(v^2+bv) \qquad (a)$$

La velocità dell'acqua non è la stessa in tutt'i punti della sezione di un canale. Se, come ordinariamente avviene, la sezione è simmetrica rispettó ad un piano verticale, la velocità massima sarà pel filo di acqua che trovasi nell'intersezione della superficie col piano di simmetria; e se questa mancasse, la più grande velocità sarebbe pel filo di acqua, cui corrisponderebbe la profondità massima. Partendo dal luogo del massimo, la velocità andrà diminuendo nei fili liquidi, come si approssimano alle pareti del canale; e ciò dipende dalla coesione molecolare, la quale cominciando dallo strato liquido aderente alla parete, genera nella successione delle falde liquide una resistenza che continuamente decresce fino a trovare un limite nel filo d'acqua sovrastante alla massima profondità. Laonde nell'equazione (a) si dovrà sostituire a v il suo valore medio, vale a dire quel valore che se fosse comune a tutti i fili della massa liquida, conserverebbe inalterata la portata del canale. Prony discutendo 30 sperienze fatte da Dubuat ha trovato la relazione

$$w = v \cdot \frac{v + 2,372}{v + 3,153}$$

nella quale w disegna la velocità media, e v quella della superficie; e per un valore medio di w soddisfacente nella pratica egli ha trovato $w = 0,8v$.

Dalla discussione delle medesime sperienze Prony ha dedotto i valori numerici delle costanti a e b dell'equazione (a). Più tardi Eytelwein estendendo le sue ricerche a 91 canali e fiumi ha attenuto $\frac{a}{g} = 0,00036554$, $b = 0,0664$; e così l'equazione del moto uniforme nei canali è divenuta

$$p = 0,00036554 \frac{c}{s} (v^2 + 0,0664v).$$

CAPO TERZO.

Dei fiumi.

130. Le acque raccolte sui monti sia per le pioggie, sia per la liquefazione delle nevi, in parte restano assorbite dal suolo pel cui mezzo vanno poi a gocciolare in quelle cavità sotterranee che alimentano le sorgenti dei fiumi; in parte discendono pel declive terreno, e formano quei torrenti che dopo una pioggia dirotta vediamo scendere precipitosi pel fianco dei monti.

La caduta di un semplice rivolo di acqua per un terreno in pendio soddisfa alle leggi che seguono i gravi nella loro discesa pei piani inclinati. La linea per cui si muovono è quella che segna la direzione di massima pendenza; e la loro velocità, massima ove è massimo l'angolo d'inclinazione del terreno coll'orizzonte, va poi diminuendo come il pendio si rende più dolce, dapoichè le asprezze del suolo e la coesione tra le particelle liquide moderano continuamente l'effetto dell'azione acceleratrice della gravità.

Cominciando dalle sinuosità che dividono gli alti poggi e terminando allo sbocco delle basse valli nelle pianure adiacenti, il terreno va continuamente minorando il suo declivio; e le acque che dapprima scendono divise e celeri, vanno poi mano mano

rallentando il loro corso, e riunendosi in una massa sempre più grande, sì per l'unione dei diversi rivi che per la sopravvenienza di altre acque. Così vediamo il torrente che precipita fragoroso da un'alta vetta rotolare sul fianco della montagna massi di pietra e tronchi di alberi che ha svelto lungo il suo cammino; indi pervenuto nella valle non trascina che grossi ciottoli, più innanzi trasporta ghiaie ed arene; ed in fine non depone che belletta e melma. Da un lato mancando la velocità dell'acqua nella stessa ragione scema la sua forza impulsiva, mentre dall'altro diminuendo il declivio, aumenta negli ostacoli che le acque incontrano, la componente del peso normale al suolo, e che misura la resistenza da vincersi.

Nella dipendenza in cui sono dal grado di pendenza del terreno sì la forza impulsiva delle acque che la cedevolezza degli ostacoli, sta la ragione per la quale i guasti che i torrenti recano nelle valli e nei piani adiacenti, divengono sempre più grandi, a misura che una cieca avidità va distruggendo le selve, di cui la Natura aveva ornato i nostri monti. Quella terra che prima raffermata dalla lenta deposizione dell'*humus*, ed inchiodata per così dire alla roccia sottoposta dalle innumerevoli radici degli alberi e delle macchie, ora priva di queste connessure e fatta sciolta e mobile dalla vanga, si lascia facilmente trasportare dalle acque delle pioggie che per lo innanzi vi scorrevano inoffensive; le pietre non più legate da un'immensa rete di radici, e prive di quel cemento naturale con cui le covriva un saldo terreno, pressochè non offrono più resistenza all'impulsione delle acque; la roccia in fine lasciata nuda, ed esposta all'azione deteriorante dell'aria e delle vicende meteoriche, cade in disfacimento, ed aumenta la somma dei materiali carreggiabili dai torrenti. Gli stessi macigni che l'impulsione diretta delle acque non avrebbe potuto svellere, per la continua sottrazione della terra dal lato del declivio, restano finalmente privi di sostegno, e precipitano pel proprio peso. La diminuzione delle sorgenti e le piene che nei fiumi divengono sempre più grandi, trovano ancora la loro ragione nella distruzione delle selve; poichè oltre all'acqua che le

piante assorbono, e che manca in conseguenza ai torrenti, esse nei loro rami e nelle foglie offrono altrettanti ostacoli al movimento di quella che non hanno assorbita, e trattenendola così sulla terra danno il tempo che questa se ne imbeva.

Per lo stesso principio comprendiamo ancora come le ineguaglianze del suolo costringendo le acque a percorrere in moltiplici giri la distanza che separa le sorgenti dei fiumi dalle loro foci, costituiscano uno di quei mezzi provvidenziali della Creazione, che a prima vista semplici e senza scopo apparente, divengono poi cagioni di svariati ed utili effetti. Se i torrenti in linea retta ed in massa unita scendessero pel declive dei monti, diverrebbero un flagello sterminatore delle sottoposte campagne; al contrario da una parte le ondulazioni del terreno conservano divisi i fili di acqua che vanno poi a congiungersi in una sola massa nel fondo della valle; dall'altra un pendio che varia continuamente di direzione, tempera la velocità dei rivoli, obbligandoli a percorrere cammini sinuosi. Dal che poi si rileva che l'Idraulico, il quale cercasse rettificare i tronchi superiori dei fiumi, in vece di moderare taluni effetti delle piene, ne renderebbe più disastrose le conseguenze.

131. Quando il corso di un fiume è stabilito, vale a dire che non è più turbato da sottrazione dei diversivi o da sopravvenienza degl'influenti, nelle diverse sezioni del suo alveo la celerità delle acque è sempre reciprocamente proporzionale all'area della sezione. Questo principio suppone che nelle diverse sezioni del tronco debba nello stesso tempo passare un medesimo volume di acqua. Ed in vero se in una delle sezioni inferiori passasse una quantità di acqua maggiore di quella che nello stesso tempo transita per le sezioni superiori, l'acqua mancherebbe nelle sezioni intermedie, ed il letto del fiume restando ivi pressochè a secco, la corrente affluirebbe celeramente dal tronco superiore, ed il vôto sarebbe ripianato; e se viceversa avvenisse, l'acqua si accumulerebbe nelle sezioni superiori, e traboccherebbe dalle sponde. Dunque per le diverse sezioni di un fiume che ha stabilito il suo corso, deve passare nel medesimo tempo un egual volume di ac-

qua; ed in conseguenza dove il letto si restringe, è d'uopo che la corrente divenga più celere, e dove il letto si allarga, la corrente andrà necessariamente più lenta.

Questa legge idrodinamica congiunta all'altra sulla relazione della celerità della corrente col pendio del terreno, rende ragione di tutt' i fenomeni che si osservano nel movimento delle acque condotte dai fiumi.

— 1° Tutte le cagioni che ritardano il moto della corrente nei tronchi inferiori dei fiumi, aumentano il volume dell'acqua nei tronchi superiori e possono produrvi piene ed allagamenti. Così avviene che i fiumi producono terribili inondazioni nei paesi prossimi al mare, e che non si possono attribuire a piogge che non caddero, nè a nevi che non esistono: queste inondazioni sono occasionate dall'alta marea, la quale rallentando la celerità della corrente presso la foce del fiume, lascia accumulare le acque nella regione superiore di quel tronco. Similmente avviene che dopo una breve pioggia il fiume presenti un'escrescenza notevole, che va poi diminuendo, quantunque sopravvengono piogge lunghe e dirette. Nel tempo della prima pioggia la lentezza con cui il fiume correva nel tronco inferiore, opponeva un ostacolo all'acqua che i torrenti immettevano nei tronchi superiori, e quindi la ragione del loro aumentato volume. Come poi la continuata pressione di quest'acqua ha reso più celere il moto verso la foce, così l'altra sopravvegnente trovando il corso stabilito con una velocità maggiore, ha potuto esser condotta dal fiume senza quell'apparente aumento di massa, che costituisce una piena.

— 2°. Tanto nella confluenza dei fiumi, che nella loro divisione in più tronchi per mezzo di diversivi, l'esperienza ha dimostrato non avvenire considerevole variazione nel volume dell'acqua, ma soltanto aumento di celerità nel primo caso, e diminuzione nel secondo. Questi risultamenti sperimentali sono corollari della stessa legge idrodinamica, Ed in vero sia *as* (*fig.* 166) il livello dell'acqua, che nel luogo della confluenza supponiamo elevato secondo la curva *smt;* e sulla retta *ce* parallela al fon-

do dell'alveo s'intendano abbassate le perpendicolari *ac*, *mn*, *bc*. Le molecole di acqua contenute in *cn* sarebbero spinte contro la corrente dall'eccesso della pressione *mn* sull'opposta pressione *ac*, e viceversa le molecole della linea *ne* sarebbero dal medesimo eccesso di pressione accelerate nel senso del loro movimento. Nel tronco superiore vi sarebbe dunque un ritardo che eleverebbe il livello dell'acqua pel continuo afflusso di quella che sopravviene, il ventre *smt* sarebbe spinto con maggior forza, e l'effetto ultimo della confluenza sarebbe necessariamente quello di accelerare il movimento dell'acqua nel tronco inferiore senza produrre notevole innalzamento di livello. Così il Reno dopo aver ricevuto il Meno, il Danubio dopo essersi unito all'Eno, il Tevere ricevute le acque del Teverone, ec. non sembrano trasportare un maggior volume di acqua. E quanto al lieve abbassamento che i diversivi producono nel tronco principale di un fiume, regge ancora lo stesso principio; poichè aumentata per mezzo dei canali la sezione nel volume dell'acqua fluente, la celerità diviene necessariamente minore, e le acque sopravvegnenti hanno così il tempo di raggiungere quelle che precedono. Pessimo consiglio è dunque quello di dividere le acque per mezzo di canali affine di prevenire le piene nel tronco principale del fiume. Operando in tal modo alla diminuita celerità nei diversivi si aggiungono una maggior resistenza nell'alveo aumentato di superficie, ed una più facile deposizione di arene e terre che elevando il letto ne diminuiscono il pendìo; ed aumentati così gli ostacoli al movimento delle acque nei tronchi inferiori, le sopravvegnenti si accumulano in maggior copia, e rendono la piena più tremenda.

— 3° Per taluni fiumi l'escrescenze non si mostrano enormi che in qualche tronco del loro alveo, ed ivi formano un *ventre della piena*. Le inondazioni del Tevere, cominciando dalle più antiche di cui si trova memoria presso gli storici, sono sempre avvenute in Roma e nei suoi dintorni, senza che altrove lungo il corso dello stesso fiume sia accaduta egual ruina: l'Arno presenta un fenomeno simile presso Pisa. L'esistenza di que-

sto fatto dimostra che nel luogo, ove si produce, l'inclinazione nel fondo dell'alveo è rapidamente diminuita, se pur non volge in contrario senso; le acque in conseguenza ivi dovranno rallentare la loro velocità, e divenendo così un ostacolo per quelle che sopraggiungono, le obbligheranno ad accumularsi l'una sull'altra, ed il ventre della piena si eleverà qual enorme protuberanza. Negli sperimenti all'uopo eseguiti su fiumi artefatti si è osservato che i galleggianti abbandonati alla corrente, vengono dapprima travolti nel gorgo che si forma all'origine del ventre, ricompariscono poi alla sommità di esso, ed in fine discendono pel suo lato declive. Questo moto dei galleggianti dichiara quello della corrente che li trasporta: le acque dunque che continuamente affluiscono dai tronchi superiori del fiume, ritardate nelle falde inferiori si elevano con un dorso convesso, sul quale le falde superiori della corrente ascendono da un lato e discendono dall'altro. Ed in simili casi è tale l'affluenza delle acque che dei larghi emissarî sia espressamente fatti, sia che il fiume li abbia da se stesso praticato squarciando gli argini, non hanno potuto impedire che il ventre avesse durato intere giornate, come è stato più volte osservato nelle piene del Po, dell'Adige, ec.

Il ventre delle piene non è che un caso particolare di un fenomeno che sovente si osserva nel moto delle acque, e che gl'Idraulici distinguono col nome di *rigurgito*. È questo un movimento a ritroso che si produce nei fili superiori di una corrente, che urta un'ostacolo invincibile. Immaginiamo, per esempio, che nel fondo di una valle, per la quale corre un fiume, si elevi una chiusa che la serri da un lato all'altro: l'acqua all'incontro della barriera si alza perchè continuamente premuta da quella che la segue, e la superficie che prima s'inclinava all'orizzonte nel senso della corrente, ora prende un'opposta inclinazione, dimodochè i fili inferiori della corrente seguono il pendìo dell'alveo, mentre i fili superiori pel nuovo declivio della superficie di livello prossima alla chiusa scorrono a ritroso delle acque inferiori; e con questo duplice movimento il volume liquido semprepiù cresce finchè non giunge a traboccare dalla sommità della barriera.

Non altrimenti che una chiusa il mare agisce sulle foci dei fiumi, quando coll'alta marea vi oppone un'immensa barriera di acqua, o nelle burrasche le ostruisce con una barra di arene: così la corrente del fiume si arresta ed il rigurgito ha luogo. Sulle coste orientali dell'America meridionale l'alta marea sale a grande altezza: ivi il Rio delle Amazzoni, il più gran fiume del mondo, scarica tal volume di acqua, da respingere quelle dell'Oceano e solcarne la superficie per una lunghezza di circa 30 leghe. A questa enorme massa contrasta l'alta marea; due monti di acqua si elevano nel conflitto, ma il gigante dei fiumi bentosto cede alla potenza dell'Oceano, ed un muggito che si ode a più leghe di distanza mette in fuga gli esterrefatti abitatori delle sponde, annunziando loro l'avvicinarsi del *Pororòca*, ossia dell'entrata dei flutti nell'alveo del fiume. L'immenso rigurgito che ne deriva, si estende per meglio che 200 leghe dentro il fiume, mentre quello che le burrasche dell'Adriatico producono nel Po non va oltre le 50 miglia. Ciò dipende dalla differenza del declivio: il fiume delle Amazzoni corre orizzontale per 160 leghe almeno, ed il Po non ha dolce pendìo che nei tronchi prossimi al mare. Or è facile comprendere che il rigurgito si deve tanto più estendere sul corso del fiume, per quanto l'alveo è meno declive: fingiamo per esempio che *ab* (*fig.* 167) rappresenti l'altezza della barriera, e *cd* il pendìo della superficie, che in un corso stabilito è prossimamente quello del fondo; l'orizzontale *am* definirà la lunghezza *cm* del rigurgito idrostatico, mentre se il pendìo fosse stato *ce*, il rigurgito si sarebbe esteso fino ad *n*. Questo metodo definisce l'estensione del rigurgito idrostatico, vale a dire di quello richiesto dalla condizione di equilibrio; ma la velocità, che l'acqua acquista nel tornare verso la sorgente, le fa percorrere un cammino maggiore, che per una media desunta da più osservazioni si calcola una volta e mezzo la lunghezza del rigurgito soddisfacente all'equilibrio.

Se nell'unione dei confluenti ai fiumi principali l'angolo di convergenza è molto acuto, le acque si adagiano l'una a fianco dell'altra senza che il loro movimento patisca vicendevole distur-

bo. Così il Rio Negro entrando ad angolo acutissimo nel fiume delle Amazzoni, continua per 100 miglia di scorrergli a fianco colle sue acque oscure distinte dalle acque biancastre dell'altro fiume. Ma se l'angolo di convergenza si avvicina al retto, ed uno dei fiumi sia gonfiato da una rotta improvisa, potrà succedere tale rigurgito nelle acque dell'altro da esserne respinte indietro. L'Arva, uno dei confluenti del Rodano, colle sue piene costrinse più volte questo fiume a retrocedere verso Ginevra, dimodochè le ruote dei mulini girarono a rovescio.

Il rigurgito, che avviene nello sbocco dei fiumi nel mare ed in quello dei confluenti nel fiume principale, sospendendo temporaneamente il moto delle acque, rende più facile il deposito delle arene e della melma. Le acque, che trovano ostrutto il loro cammino, divergono or da un lato, or dall'altro, e l'alveo che le conduce ne riceve in conseguenza tutte quelle inflessioni che d'ordinario si osservano presso allo sbocco dei fiumi. Era celebre presso gli antichi il Meandro pei suoi lunghi giri: la Vistola prima di scaricarsi nel mare si piega in tante sinuosità, d'allungare il suo corso d'intorno a dugento miglia in un breve spazio: così ancora sappiamo dalla relazione del suo viaggio che il Condamine dovette passare in un sol giorno ventidue volte un influente delle Amazzoni. Perciò, secondo Buffon, il selvaggio si accorge della prossimità del mare dai giri del fiume, e della vicina confluenza dai serpeggiamenti dell'influente.

Finalmente il rigurgito avviene quando il fiume da un ampio letto passa in un'angusta gola. Dovendo la velocità essere inversamente proporzionale all'area della sezione, è d'uopo che il fiume nel passare dal largo allo stretto divenga tanto più celere, quanto la gola, in cui s'introduce, è più angusta dell'alveo che prima percorreva. Or un aumento di celerità suppone un accrescimento di forza, la quale non altrimenti può generarsi che per un'aumentata pressione delle acque che incalzano, ossia per un'accresciuta altezza. Le acque dunque presentandosi all'imboccatura della gola, e non potendo tutte entrare nel tempo stesso, in parte si arrestano, e si alzano perchè spinte da quelle, che vengon

dietro; in conseguenza quelle ch'entrano, movendosi sotto l'azione di una pressione più grande, acquistano una velocità più intensa. Quindi avviene che l'acqua penetrata nella gola, acquista un sensibile declivio, non altrimenti che fa la piena quando trabocca dal ciglio dell'argine. Per queste variazioni nell'ampiezza dell'alveo i fiumi prendono nei vari tronchi differentissime velocità: il Connecticut nell'America corre in un certo sito angusto e precipitoso con tanta violenza che slancia i corpi che gli cadono sopra, come le ruote di un cocchio celerissimo scagliano il fango e l'arena; il Tigri, che in lingua meda vuol dir saetta, ha ricevuto questo nome dalla grande rapidità che il suo moto acquista in taluni luoghi.

132. Finora abbiamo considerato le vicende del moto in un filo di acqua durante tutto il suo corso dalla sorgente alla foce: consideriamo ora la velocità relativa dei diversi fili che in uno stesso tempo passano per la medesima sezione dell'alveo.

La legge idrodinamica dimostrata dal Torricelli diede origine ad una dottrina sul moto delle acque che fu celebre sotto il nome di *scala delle velocità*. Essa comparava il movimento delle acque nei canali e fiumi agli efflussi dalle luci scolpite nelle pareti dei recipienti: e siccome in questi le celerità di efflusso sono proporzionali alle radici quadrate dell'altezza dell'acqua sovrastante la luce, così nel moto dei fiumi la celerità massima presso al fondo, deve poi gradatamente decrescere come il filo di acqua si approssima alla superficie. Nella quale la velocità sarebbe nulla, se non fosse comunicata dai fili sottoposti mediante quella debole coesione che unisce le particelle dei liquidi. È noto inoltre (n° 124) che praticando sulla parete verticale di un recipiente inesausto una serie di fori a diverse altezze, le corrispondenti celerità di efflusso sarebbero rappresentate dalle ordinate di una parabola; quindi diversi Idraulici si diedero a costruire delle tavole paraboliche per rappresentare la scala delle velocità pei diversi fili di acqua di una corrente.

Questa dottrina foronomistica, proposta la prima volta da Galileo, indi professata da Torricelli, Guglielmini, Grandi, Poleni,

Varignon, Pitot, Bossut, ec. fu oppugnata da altri non meno illustri Idraulici, tra quali basterà rammentare Castelli, Cassini, Dubuat, Prony, Mengòtti. E senza ripetere la lunga serie degli argomenti con cui fu combattuta, ci limiteremo a due soltanto che sono tra i più forti. Il primo è tratto dalla forma della superficie: se i fili di acqua fossero tanto più veloci quanto più profondi, quelli che corrono per lo mezzo della superficie dovrebbero essere più bassi di quelli che vanno prossimi alle sponde e l'acqua nel fiume avrebbe una superficie concava, non altrimenti che avviene ad un recipiente che si vôta per un'ampia luce scolpita nel fondo. Al contrario l'osservazione ci mostra il filone medio della superficie più elevato di quelli che vanno lateralmente, dimodochè la faccia superiore delle acque è convessa anzichè concava; dunque dalla superficie al fondo la celerità non è crescente. Questa illazione è poi dichiarata un fatto dal secondo argomento che segue. Ai capi di un filo siano fermate due palle, l'una più leggiera e l'altra più pesante dell'acqua, dimodochè immerse in questo liquido, la palla più leggiera resti prossima alla superficie di livello e mantenga sospesa per mezzo del filo l'altra più pesante. Questo sistema, che dicesi *galleggiante composto*, s'immerga in un canale regolare, e si vedrà la palla superiore precedere costantemente l'inferiore. Lo stesso si osserverà sperimentando sui fiumi, purchè si faccia in luoghi ove il corso dell'acqua non è turbato da rigurgito, chè in tal caso sarebbe la palla inferiore viceversa più celere dell'inferiore. La celerità massima si trova dunque alla superficie della corrente, e propriamente in una certa linea media che costituisce il filone, nel quale il galleggiante va a situarsi da se stesso [1]. Lateralmente a que-

[1] Sia *mn* (*fig.* 168) la superficie del fiume e *g* il galleggiante lasciato fuori la linea *cd* di massima celerità. Poichè questa è decrescente nei fili di acqua dal filone alla sponda, il galleggiante riceverà urto maggiore dai fili prossimi a *cd*, che da quelli più lontani: e per tale ineguaglianza si produrrà un moto di rotazione nel senso indicato dalla freccia. Così rotando il galleggiante, il lato suo prossimo a *ed* avanzando nel senso della corrente non incontrerà resistenza, mentre il lato opposto movendosi in

sta linea media, la celerità diminuisce, come il filo di acqua più si approssima alla sponda, donde la resistenza dell'alveo per mezzo della coesione tra le particelle del liquido s'irradia verso il mezzo della corrente.

133. Rispetto poi alla velocità media di una sezione del fiume ed alla portata che ne risulta, si applicano le stesse formole che riguardano il movimento dell'acqua nei canali.

CAPO QUARTO

Endosmosi ed esosmosi.

134. Il moto può essere prodotto nei liquidi non solo per azione della gravità o di forze impulsive, ma eziandio per quella di forze molecolari.

In una soluzione di solfato di rame Fischer immerse un tubo di vetro, pieno in parte di acqua distillata e chiuso da un pezzo di vessica. L'acqua che nel tubo stava un pollice sotto il livello della soluzione, pervenne dopo più settimane a superarlo oltre un decimetro: un filo di ferro lasciato per qualche tempo nel tubo, ne usciva con tracce di rame ridotto, e ciò dichiarava che la soluzione vi era penetrata attraverso la membrana.

L'esperimento di Fischer fu ripetuto e variato da Magnus con diverse soluzioni saline; e si ebbe il risultamento che il moto va sempre dall'acqua distillata alla soluzione, e cessa quando il grado di saturazione diviene lo stesso pei due liquidi.

Un fenomeno consimile fu osservato da Parrot. Questi prese un vasellino di vetro, lo empì esattamente di alcool, lo chiuse con un pezzo di vessica, ed in fine lo capovolse in un bagno di acqua. Dopo alquante ore cavato l'apparecchio dal bagno, la

senso contrario, urterà contro i fili d'acqua che lo sospingono, e la componente di questo urto, normale alla superficie del galleggiante, lo spingerà continuamente verso *ed*.

membrana si trovò fortemente tesa dall'acqua penetrata nel vasellino, talchè pugnendola con una spilla, scappò fuori un zampillo alto parecchi decimetri — La concentrazione dello spirito di vino conservato in sacchetti di pelle, la gran quantità di parte alcoolica che assorbono le frutta conservate nello spirito, e la lacerazione dell'epiderme delle ciliege mature per effetto di una pioggia, sono fenomeni congeneri agli altri qui sopra esposti.

135. Questi fatti non erano coordinati a veruna teoria quando il Dutrochet vide la loro importanza per la spiegazione di diversi fenomeni fisiologici, e conobbe la loro dipendenza dall'azione di due correnti che hanno luogo attraverso la lamina porosa, e che chiamò l'una *endosmosi* (corrente ch'entra) e l'altra *esosmosi* (corrente ch' esce). Egli usava l'apparecchio rappresentato dalla fig. 169, cui diede il nome di *endosmometro*. Si compone di un tubo *ab*. tenuto verticalmente dalla tavoletta *pq* che poggia sull'orifizio del recipiente *kl*: il tubo finisce inferiormente con una specie d'imbuto, la cui apertura *cd* è chiusa da una membrana. Versando acqua salata nel tubo ed acqua distillata nel recipiente, il livello del liquido si eleverà nel tubo, e la reazione del nitrato di argento farà conoscere la presenza del sale nell'acqua del recipiente. Dunque attraverso la membrana si sono stabilite due correnti, l'una di acqua distillata dal recipiente nel tubo, e l'altra di acqua salata in opposta direzione; e poichè il liquido si eleva nel tubo, è necessario dire che la prima corrente è stata più forte della seconda. In generale si dà il nome di endosmosi alla corrente più forte, e nell'esperimento descritto si dirà esservi endosmosi dall'acqua pura all'acqua salata.

Oltre il fatto delle due correnti in questi moti prodotti da forze molecolari il Dutrochet ha scoverto ancora le seguenti leggi.

— 1. Per avvenire l'endosmosi è d'uopo che i due liquidi separati dalla membrana siano solubili l'uno nell'altro. Non avvi endosmosi tra l'acqua e l'olio: ma essa ha luogo tra gli oli fissi ed i volatili, tra questi e l'alcool.

— 2. La produzione dell'endosmosi richiede una differenza di ascensione capillare tra due liquidi. L'acqua pura si eleva in un

tubo capillare più che l'acqua contenente un sale; e l'esperienza fa conoscere esservi endosmosi dalla prima alla seconda. Lo stesso avviene dell'acqua distillata rispetto all'alcool ed all'etere, i quali hanno una ascensione capillare minore della prima. Ed in generale, meno talune eccezioni presentate dagli acidi, l'endosmosi va dal liquido che ha maggiore ascensione a quello che ne ha meno.

— 3. La densità relativa dei liquidi influisce sulla direzione e celerità dell'endosmosi. Questa procede per esempio, dall'acqua distillata a quella che porta disciolta gelatina, albumina, gomma o zucchero: vale a dire ch'essa va dall'acqua meno densa alla più densa. Una soluzione di acido tartarico alla densità 1,05 sembra inerte rispetto all'acqua distillata, poichè rende l'endosmosi eguale all'esosmosi: con una densità maggiore di 1,05 l'endosmosi va dall'acqua all'acido, e sotto una densità minore la corrente più forte va in senso inverso.

— 4. L'elevazione di temperatura, che diminuisce l'ascensione capillare, aumenta al contrario l'energia dell'endosmosi. L'intestino cieco di un pollo fu pieno di acqua contenente un quinto di gomma in soluzione, e fermato con una ligatura all'estremità di un tubo di vetro. Fu quindi immerso in un vase contenente acqua distillata a 14.°; ne fu tolto dopo un'ora e mezzo, ed il suo peso si trovò aumentato di 13 grammi. — Allorchè la corrente si stabilisce tra acqua ed acidi, la diminuzione di temperatura favorisce l'endosmosi verso l'acqua, come l'aumento di calore la favorisce verso l'acido.

— 5. La quantità dell'endosmosi tra i medesimi liquidi ed alla stessa temperatura è proporzionale all'estensione della membrana che chiude il tubo endosmometrico; conseguenza necessaria dell'essere il fenomeno un'effetto di forze molecolari.

— 6. La proprietà endosmomica non appartiene esclusivamente alle membrane animali; quelle tolte ai vegetali, o semplici lamine di argilla cotta producono gli stessi effetti. Il gres ed il marmo bianco sotto una piccola spessezza producono ancora una debole endosmosi; ma i corpi porosi in cui domina la silice, sembrano interamente privi di siffatta attività.

Quando il diaframma del tubo endosmometrico è una lamina inorganica, l'azione molecolare produttrice delle due correnti rimane costante: ma se la lamina di separazione è di natura organica, l'attività endosmomica cessa colla putrefazione.

CAPO QUINTO.

Celerità di efflusso dei corpi aeriformi dalle luci dei recipienti in cui vengono compressi. — Contrazione della vena fluida. — Effetti dei tubi addizionali. — Leggi del movimento lungo i tubi.

136. Immaginiamo che un vase superiormente aperto, e provveduto di un foro verso la base, venga immerso fino al fondo di una vasca piena di acqua. Dopo che sarà cessata l'agitazione prodotta nella massa pel fatto dell'immersione, l'acqua rimarrà stagnante nel vase non ostante l'apertura dell'orifizio inferiore, poichè la pressione, che il liquido esercita da dentro in fuori sulla luce del foro, eguaglia quella che in opposta direzione provviene dal liquido ambiente. Ciò che abbiamo detto di questo vase, è applicabile ad ogni recipiente di aria nel seno dell'atmosfera: scolpitavi una luce, non vi sarà efflusso di aria, finchè vi sia uniformità di temperatura tra l'interno e l'esterno, e che verun'azione meccanica turbi la calma dell'ambiente. Ma se l'aria interna ricevesse una compressione maggiore, essa uscirebbe dal foro del recipiente con una celerità dovuta all'altezza di una colonna di aria di un peso eguale all'eccesso della pressione interna sull'esterna. Sia a l'altezza della colonna liquida che nel manometro misuri questo eccesso di pressione interna, π la densità del liquido manometrico, π' quella dell'aria alla temperatura 0°; una colonna di questo fluido equivalente in peso alla colonna liquida a avrebbe alla temperatura t dell'esperienza l'altezza $a\frac{\pi}{\pi'}(1+\alpha t)$, α disegnando il coefficiente di dilatazione dell' aria. Quindi la velocità v di efflusso sarà data dall'equazione

$$v = \sqrt{2g.a\frac{\pi}{\pi'}(1+\alpha t)}.$$

Ciò suppone che il teorema di Torricelli avesse luogo negli efflussi dei fluidi aeriformi come in quello dei liquidi; analogia che potrebbe ammettersi a priori, se l'Idrodinamica avesse potuto scovrire una dipendenza reale tra la legge torricelliana ed il principio di egual pressione, comune ai liquidi ed ai fluidi aeriformi. In mancanza di questa pruova diretta, ne abbiamo una indiretta nella coincidenza dei risultamenti sperimentali con quelli dati dalla formola. Per questa comparazione ci serviamo delle sperienze fatte da d'Aubuisson de Voisins per determinare la quantità di cui si contrae la vena negli efflussi dei fluidi aeriformi. Egli adoperava un gassometro o cassa cilindrica aperta in basso, alta $0^m,80$ e del diametro di $0^m,65$. Sul fondo superiore della cassa stava un manometro, e vi erano scolpite diverse luci alle quali si potevano adattare tubi cilindrici e conici. Il gassometro pescava sull'acqua di un tino, nel quale poteva più o meno discendere secondo i pesi di cui veniva gravato. Si calcolava la celerità teorica mercè l'indicazione del manometro e l'aia della luce; la velocità reale poi era data dal prodotto della sezione del gassometro per l'altezza donde era disceso in un minuto secondo.

Or dagli sperimenti dell'illustre idraulico francese risulta che tra la portata teoretica e la reale esiste un rapporto pressocchè costante, il quale per gli efflussi da luci scolpite in sottili pareti presenta il valore medio di 100 a 65; in conseguenza per un medesimo gas sotto la stessa temperatura le portate e quindi le celerità sono come le radici quadrate delle pressioni sulle luci di efflusso. È noto che questa proporzionalità costituisce il teorema di Torricelli; dunque esso regge gli efflussi dei fluidi elastici non altrimenti che quello dei liquidi.

Dalla medesima serie di sperienze si è rilevato ancora che i tubi addizionali cilindrici e conici producono sugli efflussi dei fluidi elastici effetti analoghi a quelli che ne ricevono i getti liquidi. Il d'Aubuisson ha trovato che il fattore d'aggiungersi alla portata teoretica per eguagliare la reale è 0,93 tanto pei tubi cilindrici, che pei conici il cui angolo di convergenza non eccede

10°a 12 gradi: per un angolo più grande la portata reale ne riceve diminuzione.

La contrazione della vena in un getto di fluido aeriforme, oltre all'essere indicata dall' esistenza di un rapporto costante tra la portata teoretica e la reale, può rendersi sensibile turbando la trasparenza dell'aria nel gassometro coll'introdurvi una certa quantità di fumo: questo renderà visibile la forma del getto, e con essa la contrazione della vena. E comparando il fatto della contrazione all'aumento di portata dei tubi cilindrici e conici, veniamo a conoscere, egualmente che pei getti liquidi che un tale aumento risulta dall'espansione che la presenza del tubo produce nel diametro della vena, dopo aver patito la massima contrazione. Or in questa espansione e nella pressione da fuori in dentro che ne segue, sta la ragione del seguente fatto osservato per la prima volta da Griffith ingegniere delle miniere di Fourchambault. Fatto un foro di 5 a 6 centimetri di diametro sopra una parete piana di un serbatoio di aria compressa, questa scapperà fuori con forte impeto: se in tale stato avviciniamo al foro un disco di legno di circa 20 centimetri di diametro, e superata la violenza del getto perveniamo a metterlo quasi a contatto della parete, il disco non sarà più respinto, ma con brevi e celeri oscillazioni verrà continuamente attratto dalla parete, dimodochè bisognerà uno sforzo considerevole per poternelo separare. Questa esperienza si può ripetere in piccolo con un mantice*tto* da cammino, alla cui bócca sia adattato un cono di carta: quando la corrente dell'aria è stabilita, il cono sarà schiacciato dall'eccesso di pressione esterna.

Conosciuto il coefficiente della contrazione, è facile calcolare la portata Q in un secondo di tempo da una luce di cui f rappresenta l'area ed m coefficiente di contrazione. Il valore di Q si avrà dall'equazione.

$$Q = mf\sqrt{2g.a\frac{\pi}{\pi'}(1+\alpha t)};$$

e comparando le portate Q e Q′ di due luci eguali, sotto la stes-

sa temperatura ed altezza manometrica, per due gas di cui π' e π'' siano le densità, avremo

$$Q : Q' = \sqrt{\frac{1}{\pi'}} : \sqrt{\frac{1}{\pi''}} = \sqrt{\pi''} : \sqrt{\pi'},$$

vale a dire che nel caso supposto le portate saranno nella ragione inversa delle radici quadrate delle densità. Così la densità del gas idrogeno essendo a quella dell'aria come 688 a 10000, quella luce che sotto una data pressione e temperatura dà 50 pollici cubici di aria per minuto secondo, d'idrogeno ne darebbe pollici $50 \frac{\sqrt{10000}}{\sqrt{688}} = 190$.

137. Se al recipiente di un fluido elastico, che soffre una pressione interna maggiore dell'esterna, si adatti un lungo tubo, il gas spingendovisi dentro ne percorrerà la lunghezza ed uscirà dall'altro estremo. Supponiamo un manometro adattato al recipiente, ed un altro al termine del tubo. Se il gas nel correre pel condotto non incontrasse veruna resistenza, conserverebbe fino alla luce di efflusso la tensione e quindi la densità con cui è uscito dal recipiente, e le altezze nei due manometri sarebbero eguali. Ma l'esperienza ha fatto conoscere che l'altezza del manometro prossimo alla luce di efflusso è sempre minore dell'altra; dunque il gas incontra una resistenza nel tubo; e chiamando A l'altezza maggiore ed a la minore, la resistenza sarà espressa da $A - a$. Per determinare la sua influenza sulla velocità di efflusso, osserviamo ch'essa egualmente che la resistenza incontrata dai liquidi nei condotti, dovrebbe essere proporzionale a $\frac{L}{D}(u^2 + bu)$, (L indicando la lunghezza del tubo, D il diametro ed u la velocità) se le sperienze di Hutton non avessero dimostrato essere pressochè nulla la parte dovuta al termine bu. Dunque nel movimento dei gas lungo i tubi la resistenza sarà proporzionale a $\frac{Lu^2}{D}$; perciò chiamando n il fattore della proporzionalità, avremo l'equazione

$$A - a = n \frac{Lu^2}{D}.$$

Sebbene, stabilito il movimento, per ogni sezione del tubo debba passare nel medesimo tempo lo stesso volume di gas, purtuttavia non ne segue, come nel movimento dei liquidi ch'essendo la sezione costante, la celerità debba essere uniforme; poichè diminuendo lungo il tubo la tensione del gas in modo che essendo A nell'origine diviene a nella sezione prossima all'efflusso, in ragione inversa dovrà variare la lunghezza del volume fluido, e quindi la celerità delle sue molecole. In conseguenza il valore di u nell'equazione precedente non è che la velocità media del gas, ossia quella della sezione media del tubo, nella quale si avrà la pressione $\frac{1}{2}(A + b + a + b) = b + a'$, facendo la pressione barometrica $= b$, ed $a' = \frac{A + a}{2}$. Or nè questa velocità media u, nè l'altra v di efflusso sono date immediatamente; soltanto la velocità V con cui il gas entra nel tubo si può, come vedremo, esprimere in funzione dell'altezza a del manometro prossimo alla luce di uscita: bisogna dunque esprimere u in funzione di a. Primieramente osserviamo che le velocità u e v dovendo essere inversamente proporzionali alle densità del gas, ossia alle rispettive pressioni $b + a'$ e $b + a$, avremo

$$u = v \frac{b + a}{b + a'}.$$

Di più chiamando D il diametro del tubo, d quello della luce di efflusso ed m la ragione della vena contratta, avremo pel rapporto inverso dell'area di sezione alla celerità

$$v = V \frac{md^2}{D^2};$$

quindi

$$u = V \frac{md^2}{D^2} \cdot \frac{b + a}{b + a'}, \text{ ed } u^2 = V^2 \frac{m^2 d^4}{D^4} \left(\frac{b + a}{b + a'}\right)^2.$$

Sostituito questo valore di u^2 nella prima equazione, si ottiene

$$A - a = n\, LV^2 \frac{m^2 d^4}{D^5} \cdot \left(\frac{b + a}{b + a'}\right)^2.$$

La velocità V ha una certa relazione coll'altezza manometrica

a alla luce di efflusso. Facciamo dunque $V^2 = n'a$, e chiamiamo k il valore $nn'm^2 \left(\frac{b+a}{b+a'}\right)^{\frac{1}{2}}$; l'equazione precedente diverrà

$$A - a = ka \frac{Ld^{\frac{1}{2}}}{D^{5}}.$$

Il d'Aubuisson con numerosa serie di accurate sperienze ha trovato per un valore medio $k = 0,0238$. Sostituito questo valore nell'ultima equazione, avremo l'altezza manometrica a espressa in funzione delle quantità da cui dipende la velocità di efflusso; ed introdotta questa funzione in quella che dà il valore di Q (*pag.* 356) avremo la portata del tubo.

SEZIONE III.

MISURA DELLA DENSITÀ.

138. È noto che la gravità operando egualmente su tutti gli atomi della materia, rende la ragione dei pesi eguale a quella delle masse: è noto ancora che corpi differenti presentano pesi diseguali sotto volumi eguali. È dunque la materia diversamente ordinata nei varî corpi; taluni in un certo spazio ne contengono una quantità maggiore e si dicono *più densi*, altri ne hanno meno e sono *meno densi*. Perciò l'idea di densità è quella di una grandezza, il cui metodo di misura poggia sui seguenti principî.

139. La contrazione che il freddo produce nei corpi conosciuti più densi, come l'oro, il platino, ec. dimostra non esser noto verun corpo, le cui molecole non siano separate da interstizî vôti, e che possa in conseguenza riguardarsi come unità naturale di densità. Questa grandezza dunque non ammette che un'unità convenzionale, che potrebbe essere rappresentata da qualsivoglia corpo, se la facilità della misura non facesse preferire l'acqua pei solidi e liquidi, e l'aria pei corpi aeriformi.

Ciò posto supponiamo che in un dato volume del corpo scelto per unità di densità si contenga un numero n di molecole; se un altro corpo sotto lo stesso volume ne contenesse $2n$, queste nei loro interstizi dovrebbero lasciare uno spazio vôto metà di quello che si trova nel primo, ed avrebbe in conseguenza una densità doppia. Dunque: *essendo eguali i volumi, le densità saranno direttamente proporzionali alle masse e quindi ai pesi.*

Supponendo ancora un terzo corpo, che rispetto al primo preso per unità, avesse lo stesso peso, ma un volume doppio; due volte maggiore sarebbe lo spazio vôto in esso contenuto, ed in conseguenza due volte minore la densità. Dunque: *essendo eguali le masse, le densità saranno nella ragione inversa dei volumi.*

Siano A e B due corpi; M, D, V la massa, la densità ed il volume del primo; M', D' e V' le anologhe quantità pel secondo. Pei due teoremi precedenti avremo

$$D : D' = \frac{M}{V} : \frac{M'}{V'}.$$

Prendendo la densità di B come unità, M' come unità di massa, e supponendo V' eguale all'unità di volume; l'eguaglianza precedente diverrà

$$D = \frac{M}{V},$$

donde

$$M = D.V \quad e \quad V = \frac{M}{D}.$$

Essendo nella misura della densità dei corpi l'acqua distillata l'ordinario termine di comparazione, ne segue che i numeri sostituiti ai simboli delle equazioni precedenti, non potranno avere significato concreto, se non si prenda come unità di massa il peso di un dato volume di acqua distillata ad una temperatura definita come normale: così nel sistema metrico francese l'unità di peso (il grammo) è il peso di un centimetro cubico di acqua distillata alla temperatura di 4°,1; e nel nostro abbiamo ancora la relazione che alla temperatura di circa 16° centigradi un

palmo cubico di acqua distillata pesa 20 rotola e 736 trappesi. La necessità di una simile relazione per l'interpetrazione concreta delle tre equazioni suddette è messa in piena luce specialmente dalle due ultime. Supponiamo, per esempio, un corpo, la cui densità essendo 3 volte quella dell'acqua; abbia un volume di 5 palmi cubici: il prodotto 15, che si avrà dall'equazione $M = D.V$, non potrà esprimere altrimenti la massa che rappresentandola 15 volte maggiore del peso di un palmo cubico di acqua. E quanto all'equazione $V = \frac{M}{D}$ fingiamo un corpo, che pesando 24 rotoli avesse la densità 6; il suo volume $\frac{24}{6} = 4$ non significherebbe nulla, se ignorassimo qual volume occupi un rotolo di acqua distillata.

Dal fin qui detto si rileva che l'ordinaria definizione della densità — *rapporto della massa al volume* — deve riguardarsi come un'espressione abbreviata, nella quale si debbono sottintendere tutte le condizioni che suppone l'equazione $D = \frac{M}{V}$, donde essa deriva; chè in contrario la suddetta definizione al difetto di prescindere da un'unità di misura aggiungerebbe quello di una comparazione tra due quantità eterogenee.

CAPO PRIMO.

Misura della densità dei solidi e dei liquidi.

140. Sappiamo pel teorema di Archimede (n.° 95) che un solido immerso in un liquido perde tanto del suo peso, quanto è quello del volume liquido discacciato; perciò prendendo l'acqua o altro liquido per termine di comparazione, la misura della densità dei solidi diviene facilissima, poichè la grande difficoltà di ottenere l'eguaglianza dei volumi viene immediatamente superata coll'atto dell'immersione. Basta dunque pesare con una buona bilancia il solido, di cui si vuol determinare la densità; indi la-

sciarlo sospeso in una massa di acqua, dopo di averlo ligato con un filo ad una coppa della bilancia; ed in fine determinare la perdita di peso che il corpo ha sofferto per la sua immersione nell'acqua. Essendo questa perdita eguale al peso del volume di acqua discacciato dal solido, avremo così conosciuto i pesi di due volumi eguali, quello del solido immerso e quello del liquido: il quoziente del primo diviso pel secondo sarà la densità richiesta, prendendo quella dell'acqua come unità.

Se tra il solido e l'acqua potesse intercedere azione chimica, allora la pesata si farà in altro liquido, dal quale il solido non possa venir alterato. Sia p la perdita di peso fatta dal solido nel secondo liquido, e questo abbia la densità d rispetto all'acqua distillata: la perdita di peso x che in quest'ultima avrebbe avuto luogo, sarà data dalla proporzione

$$x : p = 1 : d.$$

Se finalmente il solido è nello stato di polvere, si chiuderà in un cilindro metallico, di cui sia nota la perdita di peso nell'acqua. Allora pesando il cilindro pieno di polvere, e sottraendo dalla perdita ch'esso farà nell'acqua, quella che avrebbe fatto se fosse stato vôto, si avrà la perdita di peso sofferta dalla sola polvere.

141. Mediante lo stesso principio di Archimede, dalle perdite di peso che un medesimo solido riceve per la successiva immersione in diversi liquidi si possono determinare i loro rapporti di densità, ed in conseguenza averne la misura quando uno di essi sia tolto ad unità. Supponiamo che un solido, il quale perde il peso π nell'acqua distillata, facesse poi le perdite p, p', p'' ec. nei liquidi A, B, C ec. Poichè π, p', p'',... rappresentano i pesi di altrettanti volumi liquidi eguali, in ragione di questi pesi saranno le loro densità; e perciò comparandole a quella dell'acqua distillata, le loro espressioni numeriche saranno $\frac{p}{\pi}$, $\frac{p'}{\pi}$, $\frac{p''}{\pi}$, ec.

L'*areometro* di Farhenheit, destinato alla misura delle densità dei liquidi, non è che un'applicazione del principio sopra espo-

sto. Questo apparecchio si compone di un cilindro A (*fig.* 170) formato di sottile lamina di ottone, e le cui basi sono sormontate da due coni. Il cono inferiore porta l'appendice C, gravata di palline di piombo, affinchè l'apparecchio resti verticale, quando viene immerso nel liquido; il vertice poi del cono superiore finisce in un'asta metallica, che sostiene il bacino D, e sulla quale è segnato un punto z. Determinato esattamente il peso P dell'areometro, s'immerge nell'acqua distillata, e si carica il bacino D finchè il punto z stia a livello dell'acqua: chiamando p la carica finale del bacino, il peso del volume di acqua occupato dall'areometro sarà $P + p$. Allo stesso modo sperimentando su altri liquidi, e chiamando p', p'', ec. le cariche sul bacino necessarie a livellare l'apparecchio, avremo che i pesi dei volumi liquidi eguali alla porzione immersa dell'areometro saranno $P + p'$, $P + p''$, ec. Ed i rapporti di questi pesi sotto volumi eguali saranno quelli delle densità richieste.

Sostituendo all'appendice C un piccolo secchiello Nicholson ha trasformato l'areometro di Farhenheit in una sensibile bilancia idrostatica. Dopo aver livellato l'areometro nell'acqua distillata, si metta nel bacino D un pezzetto del corpo di cui si vuol determinare la densità, e si tolga tanto della carica del bacino, che l'areometro abbandonato a se stesso torni al suo primo livello. Ciò fatto, si tolga l'areometro dal bagno, si trasporti il corpo dal bacino nel secchiello, e si torni ad immergere: la perdita di peso fatta dal corpo immerso nell'acqua, renderà l'apparecchio più leggiero, ed il punto z si troverà elevato sul livello dell'acqua. Perchè vi ritornasse, sarà necessario aggiungere nuova carica al bacino, e questa, come è chiaro, rappresenterà il peso del volume di acqua eguale a quello del solido immerso. Con questi due dati il valore della densità sarà il quoziente di due numeri noti.

L'areometro di Farhenheit dà i rapporti delle densità dei liquidi rispetto all'acqua distillata presa per unità. Ma nelle fabbriche dei liquori destinati agli usi dell'industria e del commercio non si cerca la densità relativa, ma bensì il suo valore as-

soluto. A tale obbietto soddisfano il *pesa-alcool*, il *pesa-acidi*, il *pesa-mosto*, ec., i quali sono formati (*fig*. 171) da un tubo di vetro terminato inferiormente da una pallina in parte piena di mercurio: dentro al tubo vi è la gradazione dell'istrumento segnata sopra un pezzetto di carta. Quanto il liquido è meno denso, tanto più l'areometro vi s'immerge, e dal grado cui si arresta nell'equilibrio si valuta la buona qualità del liquido. Questi areometri sono graduati per volume, mentre quello di Farhenheit lo è per peso.

142. Le perdite di peso prodotte dall'immersione in un liquido, e per mezzo delle quali si hanno i rapporti delle densità dei solidi e dei liquidi, debbono essere ridotte ad una temperatura normale per essere comparabili. Supponiamo questa fermata al grado θ^o e che t^o rappresenti l'eccesso della temperatura attuale sulla normale. Chiamiamo α il coefficiente di dilatazione del liquido, e β quello del solido immerso. Se il liquido in vece del grado $\theta + t$ avesse avuto la temperatura θ, avrebbe aumentata la densità nel rapporto inverso della dilatazione, vale a dire di $1 + \alpha t$ a 1; la perdita di peso p fatta dal solido immerso sarebbe cresciuta nella stessa ragione, e quindi divenuta $p\,(1 + \alpha t)$. Ma nel passare dal grado $\theta + t$ a θ il volume del solido sarebbe diminuito nella ragione di 1 a $1 + \beta t$, e secondo questa diminuzione di volume sarebbe scemata la perdita di peso fatta per immersione. Dunque la perdita ch'è p alla temperatura $\theta + t$, alla temperatura θ sarebbbe stata $p\,\frac{1+\alpha t}{1+\beta t}$.

Se poi θ in vece di essere inferiore al grado attuale di calore, lo superasse di t gradi, allora il fattore che rende p comparabile, sarebbe $\frac{1-\alpha t}{1-\beta t}$.

CAPO SECONDO.

Misura della densità dei corpi aeriformi.

143. Unità di misura per la densità dei corpi aeriformi è l'aria atmosferica [1] perfettamente secca, alla temperatura 0° e sotto la pressione barometrica $0^{m},76$.

Il principio della ragione dei pesi sotto volumi eguali, che ci ha dato il metodo di misura per le densità dei corpi solidi e liquidi, si applica ancora ai corpi aeriformi. A tal uopo si prenda un globo di vetro capace di circa 10 litri, e provveduto di un tubo metallico per congiungerlo alla macchina pneumatica e farvi il vôto: il quale non pervenendo giammai ad essere perfetto, si terrà conto della pressione minima indicata dal provino annesso alla macchina. Allora mediante la chiave, di cui sarà provvisto il tubo di comunicazione, si chiuda il globo e si pesi esattamente. Indi si farà comunicare il globo con un recipiente di gas perfettamente secco, e la comunicazione verrà interrotta quando il gas avrà nel globo una tensione eguale a quella dell'aria esterna: ciò fatto si tornerà a pesare il globo. Chiamando P il peso del globo pieno, p quello del globo vôto, $P - p$ sarà il peso del gas che vi è contenuto. È d'uopo però osservare che la differenza $P - p$ non può rappresentare esattamente il peso del gas contenuto nel globo, se la tensione dell'aria ed il suo stato igrometrico non siano stati identici nei momenti delle pesate P e p. Essendo questa condizione difficile a verificarsi, Regnault le cui ricerche hanno per carattere un'esattezza geometrica, ha proceduto in modo che la differenza $P - p$ riuscisse

[1] Come giudiziosamente è stato avvertito dal Regnault, la scelta di un gas, qual'è l'aria, la cui composizione può variare da un istante all'altro, non è stata l'idea più felice per farne unità di misura per le densità dei fluidi elastici. Meglio sarebbe stato il togliere a termine di comparazione un gas semplice, come l'ossigeno, facile ad ottenersi nello stato di massima purità.

indipendente dallo stato dell'atmosfera. Nelle sue ricerche sulle densità dei gas, egli empiva di acqua il globo destinato all'esperimento, e lo pesava nell'aria e nell'acqua avente la stessa temperatura che quella dond'era pieno: indi faceva altrettanto sopra un secondo globo dello stesso vetro; e coll'addizione, se bisognava, di un tubo di vetro chiuso nei due estremi egli eguagliava le perdite di peso fatte dai due globi nell'acqua. Resi così eguali i volumi dei due globi, li sospendeva alle due coppe della bilancia; e quell'alterazione che i cangiamenti dell'aria recavano ad uno di essi, si riproducevano egualmente su l'altro, e l'equilibrio della bilancia non ne pativa influenza.

Se l'esperimento non è stato eseguito alla temperatura 0° e sotto la pressione barometrica 0m,76, il peso $P - p$ dovrà essere ridotto a queste due condizioni normali. Sia A l'altezza barometrica durante il tempo dell'esperienza, t la temperatura, ed a la tensione minima a cui è pervenuto il vôto nel globo. Per la legge di Mariotte il peso del gas sotto la pressione 0m,76 sarebbe stato $(P - p)\frac{0^m,76}{A - a}$; ma se la temperatura in vece di t^o fosse stata 0°, la densità e quindi il peso del gas sarebbe aumentato nel rapporto di $1 + \alpha t : 1$, e la capacità del globo diminuita secondo la ragione di $1 + kt : 1$, chiamando α il coefficiente di dilatazione del gas e k quello del vetro, di cui è fatto il globo. Il peso dunque del gas alla temperatura 0° e sotto la pressione barometrica 0m,76 sarà

$$(P - p)\frac{0^m,76}{A - a}\cdot\frac{1 + \alpha t}{1 + kt}. \quad (a)$$

Se l'esperimento, fatto dapprima sull'aria secca, si ripeta per un altro gas, pel quale i dati sieno A', P', t', il peso di questo gas sarà

$$(P' - p)\frac{0^m,76}{A' - a}\cdot\frac{1 + \alpha t'}{1 + kt'};$$

quindi presa la densità dell'aria come unità, quella del gas sarà

$$\frac{P'-p}{P-p}\cdot\frac{A-a}{A'-a}\cdot\frac{1+kt}{1+kt'}\cdot\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}\cdot \qquad (b)$$

Se il gas di cui si vuol determinare la densità avesse un'azione chimica sui pezzi metallici dell'apparecchio, allora si prenderà una boccia di cristallo a turacciolo smerigliato, si peserà piena di aria poi si tornerà a pesare dopo avervi spinto una corrente del gas per un tempo sufficiente ad espellerne tutta l'aria. Sia P il primo peso, P' il secondo. Da un'esperienza, di cui faremo parola qui appresso, si conosce che un litro di aria alla temperatura 0° e sotto la pressione barometrica 0m76 pesa 1g,2932; quindi conosciuta la capacità V della boccia in litri, la temperatura t e l'altezza barometrica A nel momento dell'esperienza, il peso dell'aria contenuta nella boccia sarà $1^g,2932\frac{V}{1+\alpha t}\cdot\frac{A}{0^m,76}$; ed in conseguenza il peso della boccia vôta sarebbe stato

$$P-1^g,2932\,\frac{V}{1+\alpha t}\cdot\frac{A}{0^m76}=p,$$

e $P'-p$ il peso del solo gas. Ottenuti questi numeri la formola (b) farà conoscere la densità del gas.

144. Mediante la formola (a) è facile ottenere il peso dell'unità di volume di un gas alla temperatura 0° e sotto la pressione 0m76, come ancora il suo coefficiente di dilatazione tra certi limiti di temperatura, per esempio tra 0° 100°.

Dopo averne determinata la capacità, il globo si peserà vôto; indi si circonderà di neve pesta, ed in questo stato verrà aperto al gas, su cui si vuole sperimentare; e quando si è certo che il gas è già alla temperatura 0° e con una tensione eguale a quella dell'atmosfera, allora il globo verrà tolto dal bagno, asciugato e pesato una seconda volta. La differenza tra il primo e il secondo peso, moltiplicata pel rapporto $\frac{0^m,76}{A-a}$ farà conoscere quello del gas introdotto nel globo; e questo prodotto diviso per la

capacità del globo, farà conoscere il peso sotto l'unità di volume.

Per determinare poi il coefficiente di dilatazione del gas si procederà nel seguente modo. Dopo aver conosciuto il peso P del gas alla temperatura 0° e sotto la pressione A, s'immergerà il globo che lo contiene in un bagno di acqua bollente, lasciando uscire liberamente il gas e notando la tensione A′ che avrà quando sarà giunto alla temperatura T del bagno. Allora interrotta la comunicazione esterna del globo, si tolga dal bagno, si lasci raffreddare fino alla temperatura del mezzo ambiente, si torni a pesare, e sia p la perdita che si troverà nel suo peso. Or il peso del gas restato nel globo, e ch'era $P\frac{A}{A-a}$ alla temperatura 0° e sotto la pressione A, alla temperatura T del bagno e sotto la presssione A′ sarà divenuto $P\frac{A'}{A-a}\cdot\frac{1+kT}{1+\alpha T}$: sottraendo questo numero dal primo, il residuo dovrà eguagliare la differenza p delle due pesate. Quindi per determinare il coefficiente α di dilatazione del gas avremo l'equazione

$$P\cdot\frac{A}{A-a}-P\frac{A'}{A-a}\cdot\frac{1+kT}{1+\alpha T}=p,$$

donde

$$1+\alpha T=\frac{A'(1+kT)}{A-\frac{p}{P}(A-a)}.$$

Con questo metodo Regnault ha trovato rispetto all'aria atmosferica per una media di due sperienze $\alpha = 0,003665$, e per l'acido carbonico $\alpha = 0,003719$.

145. Quanto ai vapori vi sono due metodi per misurarne la densità: il primo metodo consiste nel misurare sotto una certa temperatura e pressione il volume di vapore in cui si è trasformato un dato peso del liquido generatore; col secondo poi si pesa il vapore che sotto una certa temperatura occupa un recipiente di nota capacità.

Col primo metodo Gay-Lussac ha determinato le densità dei

vapori di diversi liquidi. La *fig.* 172 rappresenta l'apparecchio da lui usato. C è una campana di cristallo graduata in centimetri cubici; piena di mercurio secco essa è capovolta in un bagno dello stesso metallo, contenuto nella caldaia B di ferro fuso. La campana C è circondata da un largo tubo di vetro che si empie di acqua o di olio, secondo il grado di calore che deve tollerare prima di bollire. Il liquido, del cui vapore si vuol conoscere la densità vien chiuso nell'ampollina *m*, e pesato esattamente; indi l'ampollina viene introdotta sotto la campana, nella quale si eleva per la sua leggerezza rispetto al mercurio. La caldaia B è soprapposta ad un fornello, il quale riscaldando il bagno, fa dilatare il liquido contenuto nell'ampollina; questa non tarda a rompersi, e lascia così il liquido galleggiante sul mercurio della campana. Come il vapore si produce, il livello del mercurio discende; e se alla temperatura dell'ebollizione del liquido il livello dentro la campana è tuttavia superiore all'esterno, si avrà una pruova che tutto il liquido contenuto nell'ampollina si è vaporizzato: allora basterà leggere le divisioni occupate dal vapore, per averne il volume alla temperatura t indicata dal termometro immerso nel bagno. Or la gradazione della campana si è fatta alla temperatura 0°, alla temperatura t ogni divisione della campana sarà aumentata nel rapporto di $1 : 1+kt$, k indicando il coefficiente della dilatazione cubica del vetro; perciò il volume apparente V è realmente $V(1+kt)$. Laonde chiamando P il peso del liquido introdotto nell'ampollina, quello dell'unità di volume del vapore sarà $\frac{P}{V(1+kt)}$.

Sappiamo che un litro di aria secca sotto la pressione 0m,76 ed alla temperatura 0° pesa 1g,2932; quindi alla temperatura t e sotto la pressione A sofferta dal vapore nella campana, il peso del litro di aria sarebbe stato $1g,2932 \frac{A}{0m,76} \cdot \frac{1}{1+\alpha t}$. Avendo così i pesi di due volumi eguali di vapore e di aria, il quozlente del primo pel secondo ci darà la densità

$$D = \frac{P}{1g,2932} \cdot \frac{0m,76}{A} \cdot \frac{1+\alpha t}{V(1+kt)}.$$

Con questo metodo Gay-Lussac ha trovato che la densità del vapore dell'acqua è 0,6235 ossia circa $\frac{5}{8}$ di quella dell'aria. Donde si rileva esser facile determinare il peso dell'unità di volume dell'aria umida, conoscendo la tensione F del vapore acqueo che vi è contenuto. Ed in vero essendo per la legge di Dalton (n° 117) l'aria priva di vapore sottoposta alla pressione A — F, A indicando l'altezza barometrica; il peso della sola aria contenuta nell'unità di volume sarà

$1^g,2932\,\frac{A-F}{0^m,76}\cdot\frac{1}{1+\alpha t}$, e quello del vapore contenuto, sotto la pressione F e con una densità $\frac{5}{8}$ di quella dell'aria, sarà $\frac{5}{8}\cdot 1^g,2932.\,\frac{F}{0^m,76}\cdot\frac{1}{1+\alpha t}$. Addizionando i due numeri, il peso dell'unità di volume dell'aria umida sarà rappresentato da

$$1^g,2932\,\frac{A-\frac{3}{8}F}{0^m,76}\cdot\frac{1}{1+\alpha t}.$$

Se l'aria è saturata di vapore il valore di F corrispondente alla temperatura t sarà dato dalla tavola a *pag*. 293; se poi non vi è saturazione, il valore di F sarà dedotto dalle indicazioni dell'igrometro, come vedremo nella METEOROLOGIA.

Pei liquidi che bollono a temperature di molto superiori a 100°, Dumas ha seguito il secondo metodo sopra indicato. In un globo di vetro A (*fig*. 173), terminato da un collo sottile, s'introduce una quantità di liquido maggiore di quella che vaporizzata ne occuperebbe l'intera capacità. Per mezzo del sostegno C il globo si fa discendere nella caldaia B che costituisce un bagno di olio o sabbia; e la temperatura è data da un termometro ad aria D che s'introduce nello stesso bagno. Allorchè non si osserva ulteriore getto di vapore dalla punta m, questa si chiude con un colpo di fiamma, il globo si lascia raffreddare, e si nota il suo peso P'. Prima di sottoporre il globo all'esperimento, se n'è determinato il peso P e la sua capacità

V; quindi sarà noto il peso p dell'aria contenuta, il peso $P - p$ del globo vôto, e quello del vapore che vi si contiene dopo l'esperimento sarà $P' - (P - p)$. Rompendo la punta m in un bagno di mercurio, questo liquido penetrerà nel globo, e l'occuperà interamente se l'aria, che vi era prima di generarsi il vapore, ne sia stata tutta espulsa. Supponendo questo caso, la capacità del globo ch'era V alla temperatura dell'ambiente, è divenuta $V(1 + kT)$ alla temperatura T del bagno; e supponendo A l'altezza barometrica durante l'esperienza, un egual volume di aria avrebbe pesato

$$1^{g},2932.V(1 + kT)\frac{1}{1 + \alpha T}\cdot\frac{A}{0^{m},76};$$

quindi la densità del vapore sarà

$$\frac{P' - (P - p)}{1^{g},2932.V(1 + kT)\frac{1}{1 + \alpha T}\cdot\frac{A}{0^{m},76}}.$$

Se poi il globo non venisse interamente occupato dal mercurio, l'aria non sarebbe stata espulsa tutta dal vapore. Allora si raccoglierà l'aria residua in una piccola campana graduata, e misurandone così il volume v sarà facile calcolarne il peso p' ed il volume v' che aveva alla temperatora T del bagno; quindi nella formola precedente verrà sostituito $P' - P + p - p'$ a $P' - (P - p)$, e $V(1 + kT) - v'$ a $V(1 + kT)$.

TAVOLA DELLE DENSITÀ

SOLIDI.

NOMI delle sostanze.	DENSITA'.
Platino ridotto in lamine	22,0690
— passato per trafila .	21,0417
— battuto. . . .	20,3366
— purificato . . .	19,5000
Oro battuto . . .	19,3617
— fuso.	19,2581
Tungsteno	17,6000
Piombo fuso . . .	11,3523
Palladio	11,3000
Rodio	11,0000
Argento fuso . . .	10,4743
Bismuto fuso . . .	9,8220
Rame in filo . . .	8,8785
Rame rosso fuso .	8,7880
Molibdeno	8,6110
Arsenico	8,3080
Ottone	8,3950
Nickel fuso . . .	8,2790
Uranio	8,1000
Acciaio non battuto	7,8163
Cobalto fuso . . .	7,8119
Ferro in verghe . .	7,7880
Stagno fuso . . .	7,2914
Ferro fuso . . .	7,2070
Zinco fuso . . .	6,8610
Antimonio fuso . .	6,7120
Tellurio	6,1150
Cromo	5,9000
Iodo.	4,9480
Spato pesante . .	4,4300
Giargone di Ceylan.	4,4161
Rubino orientale. .	4,2833
Topazio orientale .	4,0106
Topazio di Sassonia.	3,5640
Berillo orientale. .	3,5489
Diamanti (più pesanti	3,5310
Diamanti (più leggieri	3,5010
Flint-glass. . . .	3,3295
Spato fluore . . .	3,1911
Tormalina (verde) .	3,1555

NOMI delle sostanze.	DENSITA'.
Zaffiro del Brasile .	3,1307
Asbesto rigido . .	2,9958
Marmo di Paro . .	2,8376
Onice	2,8160
Smeraldo	2,7755
Perle	2,7500
Carbonato di calce cristallizzato . .	2,7182
Quarzo diaspro . .	2,7101
Corallo	2,6800
Cristallo di rocca puro	2,6530
Quarzo agata . . .	2,6150
Feldspato limpido .	2,5644
Vetro di Saint-Gobain	2,4882
Porcellana della Cina	2,3847
Solfato di calce cristallizzato. . .	2,3117
Porcellana di Sèvres	2,1457
Solfo nativo . . .	2,0332
Avorio	1,9170
Alabastro	1,8740
Antracite	1,8000
Allume	1,7200
Carbon fossile compatto	1,3292
Succino.	1,0780
Sodio	0,9726
Ghiaccio fondente .	0,9300
Potassio	0,8651
Legno di faggio . .	0,8520
— di frassino . .	0,8450
— di tasso . . .	0,8070
— di olmo . . .	0,8000
— di melo . . .	0,7330
— di arancio. . .	0,7050
— di abete giallo .	0,6570
— di tiglio . . .	0,6040
— di cipresso . .	0,5980
— di cedro . . .	0,5610
— di pioppo bianco di Spagna. . .	0,5290
— di sassofrasso .	0,4820
— di pioppo ordinario	0,3830
Sughero	0,2400

LIQUIDI.

NOMI delle sostanze.	DENSITA'.	NOMI delle sostanze.	DENSITA'.
Mercurio	13,5980	Vino di Bordeaux .	0,9939
Acido solforico . .	1,8409	— di Borgogna . .	0,9915
Acido nitroso. . .	1,550	Olio di olive . . .	0,9153
Acqua del Mar Morto	1,2403	Etere muriatico . .	0,874
Acido nitrico . . .	1,2175	Olio essenziale di terebentina . . .	0,8697
Acqua di mare . .	1,0263	Bitume liquido detto nafta	0,8475
Latte	1,03	Alcool puro . . .	0,792
Acqua distillata . . .	1,0000	Etere solforico . .	0,7155

FLUIDI ELASTICI.

Nomi delle sostanze.	Densità osservate.	Densità calcolate.	Nomi degli osservatori.
Aria	1,0000	»	
Gas idrogeno . . .	0,0688	»	Berzelius e Dulong.
Id.	0,0691	»	Boussingault e Dumas.
Vapore di carbonio .	»	0,4220	
Gas idrogeno proto-carburato . . .	»	0,5596	Thomson
— ammoniacale . .	0,5967	0,5910	Biot e Arago.
Vapore acqueo . . .	0,6235	0,6200	Gay-Lussac.
Gas idrogeno proto-fosforato . . .	0,8700	»	H. Davy.
— perfosforato . .	0,9022	»	Thomson.
Vapore di acido idrocianico	0,9476	0,9442	Gay-Lussac.
Gas ossido di carbonio.	0,9569	0,9732	Cruikshanks.
— azoto	0,9757	»	Berzelius e Dulong.
— Id.	0,9720	»	Boussingault e Dumas
— idrogeno bi-carburato	»	0,9816	Thomson.
— deutossido di azoto	1,0388	1,0390	Bérard.
— ossigeno	1,1026	»	Berzelius e Dulong.
— Id.	1,1057	»	Boussingault e Dumas
— idrosolforico . .	1,1912	»	Gay-Lussac e Thénard.

FLUIDI ELASTICI.

Nomi delle sostanze.	Densità osservate.	Densità calcolate.	Nomi degli osservatori.
Gas idroclorico. . .	1,2474	1,2474	Biot e Arago.
— acido carbonico .	1,5245	»	Berzelius e Dulong.
— protossido di azoto	1,5269	1,5269	Colin
Vapore di alcool assoluto	1,6133	1,6016	Gay-Lussac
Gas cianogeno . . .	1,8064	1,8197	Id.
Vapore di acido cloro-cianico . . ,	»	2,1228	Id.
Gas solforoso . . .	2,1930	»	H. Davy.
Vapore di etere idroclorico	2,2190	2,2290	Thénard.
— di acido fluoborico	2,3120	2,3070	Gay-Lussac.
Gas deutossido di cloro	»	2,3155	J. Davy.
— cloro	2,4216	2,4260	Gay-Lussac e Thénard.
Vapore di etere solforico	2,5860	2.5830	Gay-Lussac.
— d' idrogeno arsenicato.	2,0650	2,6950	Dumas.
— nitroso	»	3,1800	Colin e Robiquet.
Gas clorossi-carbonico	»	3,2990	J. Davy.
Vapore d'idro-bi-carb. di cloro	3,4430	3,4080	Dumas.
— di acido fluorico silicato	3,6000	3,5970	Id.
— di cloruro di boro	3,9420	4,0790	Id.
Gas idroiodico. . .	4,4288	4,3399	Gay-Lussac.
Vapore di protocloruro di fosforo . .	4,8750	4,8080	Dumas.
— di essenza di terebentina . . .	5,0130	4,2110	Gay-Lussac.
— di etere idroiodico	5,4750	»	Id.
— di cloruro di silicio	5,9390	5,9600	Dumas.
— di protocloruro di arsenico	6,3010	6,2970	Id.
— di protocloruro di titanio	6,8360	7,0470	Id.
— di mercurio . .	6,9760	6,9780	Id.
— d'iodo	8,7160	8,6120	Id.
— di percloruro di stagno.	9,2000	8.9930	Id.

N. B. Le densità calcolate che si trovano nella 3.ª colonna di quest'ultima tavola, sono state dedotte dalla formola

$$\Delta = \frac{nd + n'd'}{v},$$

nella quale Δ rappresenta la densità di un gas composto, d e d' le densità dei componenti, n ed n' i loro volumi, da cui è risultato il volume v dei componenti.

LIBRO QUINTO.

ACUSTICA.

146. Il suono può esser considerato sotto tre aspetti differenti — 1° nella sua propria natura, ch'è quella di una sensazione — 2° nelle sue relazioni ai sentimenti che può eccitare nell'animo umano — 3° nella sua dipendenza dalla fisica costituzione dei corpi sonori.

Sotto il primo aspetto il fenomeno del suono vuol esser esaminato dal filosofo e dal fisiologo; sotto la seconda veduta costituisce l'obbietto della scienza musicale; e quanto all'ultimo aspetto sotto cui può esser considerato, egli è un mezzo per esplorare le leggi delle vibrazioni molecolari. Dimodochè la fisica, limitandosi a riguardarlo sotto l'ultima veduta, ne studia la sola parte obbiettiva.

CAPO PRIMO.

Produzione e conduzione del suono — Forma e celerità delle onde sonore: loro riflessione. — Compressibilità dei mezzi conduttori del suono.

147. Il suono, considerato fuor di noi, non è che un rapido movimento di vibrazione eccitato nelle molecole del corpo sonoro, e che per mezzo dell'aria o di altro veicolo si trasmette fino all'orecchio. Un dito poggiato sopra una corda vibrante o sopra una campana appena tocca dal martello, soffre un fremito che ci avverte del movimento intestino cui soggiace il corpo sonoro. Un poco di sabbia sottile sparsa sopra una lamina elastica, si vedrà saltare quando la metteremo in vibrazione strofinan-

done l'orlo con un arco di violino: un liquido alquanto viscoso presenterebbe nelle medesime circostanze un sistema di linee rilevate, come le onde che solcano la superficie di un mare in burrasca.

Che il suono abbia bisogno di un veicolo che lo conduca al nostro orecchio, facilmente si dimostra con un esperimento pneumatico. Si ponga sotto la campana della macchina uno scampanio a molla, che mediante un bastoncino metallico donde la campana è traversata, può mettersi in movimento dopo avervi fatto il vôto. Allora vedremo il martellino dello scampanio battere sul corpo sonoro, senza che verun suono giunga al nostro orecchio, purchè l'esperimento sia stato ben preparato. È d'uopo dapprima che la macchina sia atta a fare il vôto con sufficiente perfezione; poi bisogna aver posto sotto la campana qualche sostanza disseccánte che assorba il vapore acqueo non aspirato dal movimento degli stantuffi, e che potrebbe trasmettere il suono alla campana e quindi all'aria esterna; ed in fine lo scampanio deve poggiare sopra un soffice cuscino, affinchè la trasmissione esterna del suono non avvenga per mezzo del sostegno. E quest'ultima condizione vuol essere tanto più esattamente soddisfatta in quanto che i solidi in generale trasmettono i suoni meglio dell'aria: adaggiando l'orecchio all'estremità di una lunga trave, si sentirà chiaramente il rumore prodotto nell'altro estremo collo strofinio di una spilla.

148. La trasmissione del suono non è istantanea ma successiva. Quando a sufficiente distanza si osserva lo sparo di un'arma da fuoco, si veggono il fumo e la fiamma assai prima di udire il colpo: altrettanto avviene nello scoppio del fulmine, il quale presenta tra il lampo ed il tuono un intervallo di tempo che varia colla distanza dell'osservatore. La ragione di questi fatti sta nel modo di trasmissione dei suoni, com'è facile rilevare dalle seguenti considerazioni.

Sappiamo che l'elasticità consiste in quella tendenza delle molecole di un corpo a durare nella ragione di sito che le une hanno rispetto alle altre; ed una tal tendenza non può essere che

l'effetto di un equilibrio tra le forze attrattive e ripulsive, come nei solidi e liquidi, o tra le forze ripulsive e le pressioni esterne, come nei fluidi aeriformi. Ciò posto, rappresenti *ab* (*fig.* 174) un elemento di lamina vibrante, che nelle sue oscillazioni vada dalla posizione $a'b'$ ad $a''b''$. Consideriamo dapprima il movimento diretto da *ab* ad $a'b'$, e ciò che dovrà avvenire alla serie di molecole *m*, *n*, *s*,... della colonna di aria, cui *ab* comunica il suo movimento. La molecola *m*, prossima ad *ab*, verrà spinta innanzi ed avvicinata ad *n*; questa tendendo a conservare la sua distanza da *m*, si ripellerà da questa e spingerà del pari la molecola *s*; e così il movimento sarà comunicato da una molecola all'altra. Or il cangiamento nel sito della molecola *n*, come effetto di quello che l'escursione della lamina *ab* ha prodotto in *m*, avverrà in un tempo tanto più piccolo, per quanto più energiche sono le forze da cui dipende la stabilità del suo equilibrio: altrettanto diremo dell'alterazione di vicendevole posizione, avvenuta nelle altre molecole *s*, *t*, *v*, ec. Poniamo che la lamina impieghi 0,01 di secondo per avanzare ad *ab* in $a'b'$, e che sia necessario 0,001 di secondo perchè il movimento si comunichi da una molecola alla sua vicina nella colonna di aria; è chiaro che il moto di condensamento si sarà esteso a 10 molecole di aria in 0,01 di secondo, e si sarebbe esteso a 100, a 1000, se il tempo necessario alla comunicazione del moto fosse stato 0,0001, 0,00001 di secondo. Questo tempo decresce, come aumenta l'elasticità del mezzo conduttore; dunque nell'avanzarsi della lamina da *ab* in $a'b'$, il moto di condensamento avrà un'estensione proporzionale all'elasticità del mezzo.

Or supponiamo che restando inalterata l'elasticità, le forze ripulsive acquistino tale incremento da tenere le molecole *m*, *n*, *s*, ec. ad una distanza doppia della prima. Poichè l'elasticità è la stessa, ad un egual numero di molecole e nel medesimo tempo sarà comunicato il movimento di condensazione; ma per ipotesi le molecole sono ordinate sopra una lunghezza doppia della prima, dunque il movimento verrà trasmesso ancora ad una distanza doppia, vale a dire ad una distanza reciprocamente pro-

porzionale alla densità del mezzo che lo conduce. Ma se per uno stesso grado di forza elastica una densità minore nel mezzo conduttore rende più celere la trasmissione del suono, nella stessa ragione viceversa diminuisce la sua intensità. Situando sotto la campana pneumatica uno scampanio a corda già in azione, osserveremo il suono affievolirsi a misura che il vôto va innanzi.

Finchè la lamina vibrante è andata da ab in $a'b'$, la condensazione è stata crescente per tutta la serie di molecole, cui il movimento ha potuto comunicarsi. Nel movimento opposto da $a'b'$ in $a''b''$ si produrrebbe un vôto tra la lamina e la falda di aria contigua, se per la legge di egual pressione il fluido non accorresse a ripianarlo. Questo ritorno delle molecole verso le prime posizioni, non altrimenti che il moto di condensazione, comincia da quelle che sono prossime alla lamina vibrante, e va poi mano mano estendendosi al resto della serie: dimodochè un moto di rarefazione si produce nella colonna di aria prima compressa, e questo moto che restituisce il mezzo alla densità primiera, finchè la lamina procede da $a'b'$ in ab, poi lo rarefà via maggiormente nella continuazione del moto da ab in $a''b''$. E poichè le oscillazioni molecolari dei corpi elastici sono isocrone (n.° 53), così il movimento da ab in $a''b''$ avrà la stessa durata ch'ebbe quello da ab in $a'b'$; e perciò lo stesso numero di molecole di aria, che ha sofferto il movimento di condensazione, sperimenterà l'opposto movimento di rarefazione.

Il movimento di condensazione che arrivando la lamina in $a'b'$ si è protratto ad una certa distanza da essa, e supponiamo fino alla molecola t, ivi non si arresta, ma colla stessa ragione di tempo e spazio continua il suo progresso lungo la serie delle molecole, purchè la densità ed elasticità del mezzo siano costanti. E poichè all'escursione della lamina in $a'b'$ ne succede un'altra opposta in $a''b''$, così al moto di condensazione delle molecole tien dietro un altro di rarefazione, il quale sarà poi seguito da un nuovo condensamento pel ritorno della lamina in $a'b'$; quindi una nuova rarefazione, e così di seguito. Laonde se notiamo il

punto al quale la condensazione è pervenuta quando la lamina si trova in $a''b''$, e consideriamo la falda di aria compresa tra quel punto e la lamina, essa si troverà divisa in due parti eguali soggiacenti a due opposte fasi di densità: la metà contigua alla lamina sarà rarefatta, l'altra metà condensata; e quando la lamina sarà tornata in $a'b'$, la prima metà sarà viceversa condensata, e l'altra rarefatta. Questo avvicendarsi di fasi nella stessa falda del mezzo conduttore del suono, costituisce un'*onda sonora*, analogamente a quel moto di altalena, cui soggiace l'acqua del mare, quando è agitata da vento impetuoso; e dicesi *lunghezza dell'onda* la doppiezza della falda che in se racchiude le due opposte fasi di densità.

Finora abbiamo supposto che le vibrazioni del corpo sonoro fossero comunicate alla sola colonna di aria che normalmente insiste sulla lamina vibrante; ed in questo caso che può menarsi ad effetto coll'aria contenuta in un lungo tubo, l'escursioni delle molecole del mezzo saranno eguali in tutta la lunghezza della colonna, ed in conseguenza il suono avrà la stessa intensità a qualsivoglia distanza dal corpo sonoro. Ma consideriamo il caso più generale, qual'è quello di un centro di vibrazione in mezzo ad un fluido elastico indefinito, di elasticità e densità costanti. Sia *a* (*fig.* 175) questo centro dal quale immaginiamo condotte le rette *ac*, *ab*, ec. Su ciascuna di queste rette le fasi di densità, cui soggiaceranno le molecole del mezzo, saranno identiche ad eguali distanze dal centro, poichè il mezzo s'immagina egualmente elastico e denso in tutta la sua estensione. Quindi se nel punto *e* ha luogo un certo grado di condensamento o rarefazione, lo stesso grado avrà luogo in ogni altro punto che dista da *a* di una quantità eguale ad *ae*: l'onda sonora avrà dunque una forma sferica, il cui raggio andrà crescendo come il suono progredisce. Ed in questa progressione la celerità del suono rimarrà costante, poichè se la condensazione, per esempio, ha potuto in un certo tempo avanzare da *a* in *e*, in un secondo tempo eguale al primo dovrà percorrere $ec = ae$, essendovi tante molecole in *ae* per quante ve ne sono in *ec*. Ma la quantità di condensamento

ossia la quantità di cui ciascuna molecola sarà allontanata dalla sua prima posizione di equilibrio, dovrà necessariamente diminuire nella stessa ragione che segue l'aumento della superficie sferica in cui l'onda si svolge; vale a dire che l'intensità del suono, che dipende dalla quantità del condensamento, dovrà decrescere secondo il quadrato della distanza dal centro di vibrazione. Quindi comprendiamo la ragione per la quale percepiamo un suono sempre più debole, come più ci allontaniamo dal corpo sonoro.

Delle cose premesse è facile dedurre che la celerità del suono per uno stesso mezzo è indipendente dalla celerità delle vibrazioni del corpo sonoro. Fingiamo che il corpo faccia 100 vibrazioni a secondo; e poichè si richiede una vibrazione per la semionda condensata ad un'altra per la semionda rarefatta, le 100 vibrazioni non produrranno che 50 onde sonore. Sia d la distanza, alla quale perviene il moto di condensamento del mezzo conduttore in $\frac{1}{100}$ di secondo: e durante le due vibrazioni necessarie alla produzione di un'onda il moto sarà prolungato alla distanza $2d$ dal corpo sonoro; e dopo 100 vibrazioni le 50 onde sonore occuperanno la lunghezza $2d \times 50 = 100d$. E se il corpo sonoro invece di 100 compisse 200 vibrazioni a secondo, ciascuna di queste durerebbe la metà del tempo di una delle prime; ed in $\frac{1}{200}$ di secondo il moto di condensamento in vece di estendersi alla distanza d dal corpo sonoro, non andrebbe oltre lo spazio $\frac{d}{2}$. Perciò le 100 onde risultanti dalle 200 vibrazioni occuperebbero la lunghezza $2\,\frac{d}{2} \times 100 = 100d$, vale a dire lo stesso spazio di prima. E dichiarata così l'indipendenza della celerità del suono da quella delle vibrazioni del corpo sonoro, è evidente la ragione per cui un motivo musicale conserva il suo tempo a qualsivoglia distanza venga udito, quantunque le vibrazioni produttrici dei suoni acuti

siano più celeri (come dimostreremo nel capo seguente) di quelle donde risultano i suoni gravi.

149. Tutti questi risultamenti teoretici sono stati confermati da diversi sperimenti acustici per misurare direttamente la celerità del suono nell'aria. Questa misura fu la prima volta eseguita in Italia dagli accademici del Cimento; fu poi ripetuta in diversi luoghi, ed in Francia se n'ebbe una nel 1738 ed un'altra nel 1822. Calcolando la velocità per mezzo del tempo che intercedeva tra l'istante dell'apparizione della fiamma nello sparo di un cannone e l'istante in cui il suono perveniva all'orecchio di un osservatore situato ad una distanza conosciuta, si è trovato — 1° che il movimento del suono è uniforme, poichè percorre spazî proporzionali ai tempi — 2° che lo stato sereno o nuvoloso del cielo, una pressione barometrica più o meno grande, non hanno influenza veruna sulla celerità del suono, purchè l'aria sia calma; ma che l'azione del vento l'aumenta o diminuisce (secondochè è cospirante o contraria) di quanto è la componente della sua forza nel senso della retta che congiunge il corpo sonoro al luogo occupato dall'osservatore — 3° che la celerità del suono aumenta, come cresce la temperatura dell'aria.

Il fatto dunque conferma il risultamento teoretico dell'uniformità nel moto del suono; come ancora l'altro dato sperimentale della celerità indipendente dall'altezza barometrica, e dipendente viceversa dal grado della temperatura atmosferica ci assicura della relazione trovata dalla teoria tra la celerità del suono e la forza elastica e densità del mezzo conduttore. Ed in vero la legge di Mariotte (n°105) ci ha dimostrato che la tensione e densità dell'aria aumentano in ragione diretta della pressione; dunque se poniamo che il barometro sale, la tensione e densità dell'aria cresceranno egualmente, e la celerità del suono che dovrebbe aumentare per l'accresciuta elasticità, dovrà d'altrettanto diminuire per la densità fatta maggiore; la celerità rimarrà dunque inalterata, e perciò dovrà mostrarsi indipendente dalle variazioni barometriche. Non sarà lo stesso pei cangiamenti di temperatura, dapoichè se il calore aumenta, la forza elastica diver-

rà più grande ma la densità resterà minore; quindi la celerità del suono dovrà crescere sì per l'aumentata tensione che per la densità diminuita: e se viceversa la temperatura bassasse, vi sarebbe nel tempo stesso diminuzione di forza elastica ed aumento di densità, due variazioni conspiranti a diminuire la celerità del suono.

La teoria ci ha inoltre insegnato che l'intensità del suono, la quale decresce nella ragione dei quadrati delle distanze quando la vibrazione è libera per estendersi in tutto lo spazio ambiente, deve poi rimanere invariata se il corpo conduttore del suono presenta una sezione costante in tutta la sua lunghezza. Questo risultamento è stato confermato dalle sperienze di Biot sopra i tubi degli aquedotti di Parigi per una lunghezza di 951 metri. Egli stando ad un estremo della serie dei tubi dirigeva la parola ad un altro che si trovava all'estremo opposto, ed ogni dimanda riceveva la sua risposta dopo 5",58 sessagesimali, tempo che il suono impiegava nel percorrere due volte la lunghezza dei tubi, vale a dire 1902 metri. Biot volle ancora determinare a qual grado infimo dovesse discendere la voce, perchè la parola non pervenisse all'altro estremo, ma non potè riuscire nell'intento, poichè delle dimande fatte con voce sì bassa; come quella che usiamo nel parlare all'orecchio di un altro, furono intese ed ebbero la loro risposta. Dei colpi di pistola scaricati prossimamente ad un estremo della serie, cagionarono tale impeto sulle falde di aria contenuta nell'altro estremo, che la mano avvertiva un vento impetuoso, dei corpi leggieri venivano spinti ad un mezzo metro di distanza, e la fiamma di una candela n'era spenta.

Volle ancora il Biot pruovare l'esattezza del principio teoretico sull'indipendenza della celerità del suono dalla celerità di vibrazione del corpo sonoro. Udendo da un'estremità dell'aquidotto un motivo musicale eseguito da un flauto presso l'altro estremo, egli trovava identico il motivo, ed in conseguenza tanto i suoni gravi che acuti pervenivano al suo orecchio collo stesso intervallo di successione con cui si producevano, vale a dire ch'essi percorrevano lo spazio di 951 metri colla stessa velocità.

150. Abbiamo dimostrato (n.° 148) che la celerità del suono deve essere in ragion diretta della forza elastica del mezzo conduttore ed in ragione inversa della sua densità. Restava a determinare la funzione speciale che doveva rappresentare questa proporzionalità, e Newton l'ha trovata eguale alla radice quadrata dell'elasticità e del mezzo divisa per la densità d; dimodochè chiamando v la velocità del suono, si ha

$$v = \sqrt{\frac{e}{d}}.$$

Ma supponendo la temperatura dell'aria 0°, e facendo la densità del mercurio $= 1$, la densità d dell'aria sarà $\frac{1}{10466,82}$, e la sua forza elastica sarà rappresentata da ag, a disegnando l'altezza barometrica $0^m 76$ e g la forza di gravità, che alla latitudine 45° è $9^m,80594$. Sostituendo questi numeri nella formola precedente, avremo

$$v = \sqrt{0^m,76.10466,82.9,80594} = 279^m.$$

Intanto tutte le misure dirette della celerità del suono nell'aria sono concordi in assegnarle il valore di 333^m a minuto secondo, la temperatura essendo 0°. La formola dunque ci dà un valore di circa 0,2 minore del vero. Laplace fu il primo a trovare la ragione di questa divergenza nel modo stesso di propagazione del suono. Ed in vero sappiamo che il movimento di vibrazione si propaga per mezzo di compressione nelle successive falde del corpo conduttore, e l'aria svolgendo calore sotto un'azione comprimente, acquista una forza elastica maggiore di quella indicata nella formola, e perciò la velocità calcolata si trova minore di quella dedotta dall'esperienza. E Laplace ha dimostrato che per eguagliare i due risultamenti, la funzione sottoposta al segno radicale dev'essere moltiplicata per 1,41 che rappresenta il rapporto della capacità termica dell'aria a pressione costante con quella a volume costante. (n° 74). Aggiunto questo nuovo fattore si ha $v = 331^m,6$.

La realtà della cagione assegnata da Laplace al difetto della

formola newtoniana, è dimostrata da un esprimento di Biot. Questi, dopo aver fatto il vôto nel recipiente pneumatico che racchiudeva uno scampanio a molla, per mezzo di una chiavetta già annessa alla campana vi fece cadere alcune gocce di un liquido volatile: il suono, che pel vôto non era più trasmesso, ricomparve pel vapore diffuso nel recipiente. Or il movimento di vibrazione non potrebbe percorrere uno spazio saturato di vapore, se nel successivo condensamento delle onde sonore non avvenisse svolgimento di calore, poichè in contrario il vapore resterebbe liquefatto dalla compressione, ed in conseguenza il suono non sarebbe trasmesso.

La formola $v = \sqrt{\frac{e}{d}}$, che abbiamo applicata alla determinazione numerica della velocità del suono nell'aria sotto la temperatura 0°, e che potrebbe misurare la celerità del suono per qualunque altro gas, ha bisogno del fattore $\sqrt{1 + \alpha t}$ per una temperatura t superiore a 0°, poichè l'elasticità e del gas a 0° diviene $e\,(1 + \alpha t)$ quando il grado di calore è t; ed il termine αt positivo pei gradi superiori a 0°, diviene negativo pei gradi inferiori. Dimodochè chiamando v la velocità del suono alla temperatura 0° e V quella a t gradi, avremo

$$V = v\sqrt{1 + \alpha t}.$$

Joung e Laplace determinando teoreticamente la celerità del suono attraverso i liquidi ed i solidi, hanno trovato

$$v = \sqrt{\frac{g}{a}},$$

nella quale v disegna la velocità in metri, g la forza della gravità, ed a la quantità di cui si allunga o si comprime un prisma della materia conduttrice del suono, lungo 1^m, e tratto o premuto da una forza eguale al suo peso. Volendo usare di questa formola per calcolare la celerità del suono nell'acqua, è d'uopo premettere (come vedremo verso la fine di questo capo) che l'acqua sotto la pressione di un'atmosfera si comprime di 0,0000495 del suo volume. Or un prisma di acqua alto 1^m e di un centi-

metro quadrato di base pesa 100 grammi: d'altronde la pressione di $0^m,76$ di mercurio sopra un'egual base è di grammi $13,598 \times 76 = 1033,4$; quindi per determinare a si avrà la proporzione

$$a : 0,0000495 = 100 : 1033,4 \text{ ; donde } a = 0,0000004741.$$

Sostituito questo valore di a nella formola, e fatta $g = 9,80594$, si avrà $v = 1438^m$.

Colladon e Sturm misurarono direttamente la celerità del suono condotto dalle acque del lago di Ginevra. Due battelli furono ancorati sul lago alla distanza di 13487 metri. Una grande campana era sospesa nell'acqua ad uno dei battelli, nell'altro stavano gli osservatori. Il martello, che doveva percuotere la campana, era fermato all'estremità di un braccio di leva, di cui l'altro estremo dava fuoco ad una piccola massa di polvere nel medesimo istante in cui la campana riceveva il colpo. Dall'apparizione della fiamma gli osservatori numeravano il tempo pel cammino del suono, che udivano per mezzo di un tubo la cui estremità inferiore, immersa nell'acqua, era allargata e chiusa da un piano normale alla direzione del suono. In tal modo si rinvenne una celerità di 1435 metri per secondo.

Se la piccola differenza che si trova tra questo valore e quello precedentemente ottenuto per mezzo della formola, si compari a ciò che abbiamo detto (n° 67) sullo svolgimento di calore per compressione, si avrà una seconda pruova per la realtà della veduta di Laplace sulla correzione della formola newtoniana. Ed in vero rispetto all'aria, che compressa svolge copia di calore, la formola ci dà una velocità di circa un quinto minore della vera, mentre per l'aqua la cui compressione non dà sensibile svolgimento di calore, il risultamento sperimentale è presso che eguale al teoretico.

151. Abbiamo veduto (n°148) che la celerità delle onde sonore, ossia la rapidità nella successione degli addensamenti e delle rarefazioni che avvengono nel mezzo conduttore del suono, dipende direttamente dall'elasticità del mezzo ed inversamente dalla

sua densità. Se queste quantità variano secondo la legge del continuo, continua sarà eziandio l'alterazione della figura sferica delle onde, senza che si arresti la progressione del suono: ma se le due quantità, o almeno una di esse, subiscano un cangiamento improvviso e finito, come suole avvenire nella superficie limite di due mezzi eterogenei, allora l'onda sonora potrà patire un regresso analogo al rimbalzo dei corpi elastici. Rappresenti *ab* (*fig.* 176) un piano che separa due mezzi diversi, ed *o* sia un centro di vibrazione. Quando la progressione delle fasi di densità che si succedono lungo una retta *om* e che diciamo *raggio sonoro*, sarà pervenuta in *m* ad incontrare l'ostacolo *ab*, decomponiamo l'impeto molecolare in due forze, l'una diretta secondo la normale *mh*, l'altra secondo *mb*, intersezione del piano *ab* col piano normale che passa per *om*. La componente secondo *mh* sarà riprodotta in senso inverso dall'elasticità del mezzo conduttore, l'altra continuerà di spingere la molecola *m* del mezzo lungo la retta *mb*: dopo l'urto vi sarà dunque una risultante secondo *ms*, la quale farà colla normale *mh* l'angolo $hms = hmo$ (nº 51). Abbassata la *oz* perpendicolare ad *ab*, e prolungata in *o'* finchè sia $zo' = oz$; avremo $om = o'm$, ed *ms* prolungamento di *o'm*: dunque un osservatore situato in *s* udirebbe due suoni, il primo e più forte gli verrebbe per l'onda diretta *os*, l'altro meno intenso per mezzo dell'onda riflessa *ms*.

Dietro il principio della riflessione del suono è facile comprendere come due persone situate nei fuochi *z* e *z'* (*fig.* 177) di un recinto ellittico possono parlarsi a vicenda con voce così bassa che nulla possa udirsi in verun altro punto di quello spazio; poichè le onde sonore che cominciando da uno dei fuochi vanno poi a riflettersi sulla parete interna del recinto, vengono ad essere tutta concentrate nell'altro fuoco, essendo noto dalla Geometria che i raggi vettori *zm* e *z'm* fanno angoli eguali colla normale condotta pel puto *m*. — Con un semplice sperimento Weber ha reso visibile questo concentramento delle onde. L'apparecchio consiste in un vase cilindrico a base ellittica pieno di mercurio, sulla cui superficie e propriamente in un fuoco

della sua figura ellittica cade una vena sottile dello stesso metallo: numerose onde ne partono, che successivamente riflesse dalla parete interna del vase, vanno poi tutte a riunirsi nell'altro fuoco.

L'*eco* è un effetto della riflessione delle onde sonore sulle pareti degli edifizi, sui fianchi dei monti, ec. Essa è *semplice* o *multipla*, secondochè le onde sonore patiscono una o più riflessioni successive, per le quali vengono tutte rinviate verso il luogo occupato dall'osservatore. La quantità di sillabe che può essere ripetuta dall'eco, dipende dalla distanza dell'osservatore dal corpo riflettente: più questa distanza è grande, maggior tempo impiegherà l'onda a percorrerla due volte; più grande in conseguenza potrà essere il numero dei suoni prodotti innanzi che ritorni il primo. Al contrario se la distanza è così breve che le prime onde sonore ritornano appena prodotte, l'onda riflessa si aggiungerà all'onda diretta rinforzandone l'effetto; e da ciò dipende quell'aumento d'intensità che la voce acquista in una stanza vòta.

Negli sperimenti fatti sul lago di Ginevra per determinare la celerità del suono nell'acqua, Colladon e Sturm osservarono che stando il corpo sonoro a piccola profondità sotto il livello dell'acqua, e l'osservatore non molto lungi dal centro di vibrazione, il suono riusciva assai distinto nell'aria; ma la sua energia rapidamente diminuiva colla distanza, dimodochè non più si avvertiva a circa 300 metri, quantunque l'orecchio si fosse tenuto prossimo alla superficie del liquido. Intanto alla medesima distanza il suono era forte attraverso dell'acqua; le onde sonore dunque non passavano nell'aria, perchè riflesse dalla superficie che limitava i due mezzi, e lo erano in tanta maggior copia, quanto più piccolo era l'angolo sotto cui incontravano la detta superficie. Vedremo nell'azione dei raggi luminosi un effetto consimile.

È un fatto di antichissima osservazione che i suoni di notte si possono udire a distanza maggiore che di giorno; e di ciò si trovava una ragione soddisfacente nell'assenza di altri suoni

in tempo notturno. Ma Humboldt avendo osservato lo stesso fatto nelle foreste dell'Orenoco, ove il vento e gli animali non agitano il bosco che durante la notte, è stato necessario assegnare altra cagione al fenomeno. Humboldt ha osservato ancora che questo fenomeno è più sensibile nelle basse pianure che sui rialti, più sui continenti che in alto mare; e dall'analisi di queste condizioni ha dedotto che la vera cagione consiste nella mancanza di quelle parziali e moltiplici riflessioni delle onde sonore, donde viene diminuita l'intensità del suono, e che durante il giorno avvengono nello scontro vicendevole di quelle correnti ascendenti e discendenti che l'azione solare sulla superficie terrestre produce nella massa di aria che la sovrasta; poichè l'aria prende il calore dalla superficie del suolo, non altrimenti che un liquido dal fondo del recipiente in cui viene riscaldato. Durante la notte le correnti cessano, la densità dell'aria si trova stabilita, ed i suoni conservano a maggiori distanze la loro energia; e poichè la differenza di temperatura sulla soperficie terrestre tra il giorno e la notte, è più grande nelle basse pianure che sui rialti, sui continenti più che alla superficie dell'Oceano, si fa chiara la ragione per cui nell'istesso ordine è meno sensibile l'accrescimento notturno dei suoni.

152. Le sperienze fatte da Biot sui tubi destinati alla condotta delle acque di Parigi, hanno dimostrato che il suono si propaga realmente mercè una serie di addensamenti e rarefazioni che si succedono nell'aria ambiente il corpo sonoro. Ravvicinando questo fatto all'altro dell'identità nella sensazione uditiva qualunque sia il mezzo pel quale il suono si diffonde, siamo condotti a generalizzare il principio che la propagazione del suono per qualsivoglia mezzo necessariamente consista in una successione di condensamenti e rarefazioni, e che in conseguenza debba essere compressibile ogni corpo conduttore del suono.

La compressibilità che qui riconosciamo qual corollario della trasmissione dei suoni, è stata direttamente ricercata dai fisici con apposite sperienze. Facili riuscirono le pruove dirette della compressibilità dei fluidi elastici; e riguardo ai solidi non fu

difficile dedurla, per quelli nei quali è meno sensibile, dalla loro aumentata densità sotto l'azione di forti compressioni. Ma difficili riuscivano le sperienze sui liquidi, come quelli che sotto le più energiche pressioni non diminuiscono che di una piccola quantità il loro volume. Gli accademici del Cimento fecero le prime ricerche sulla compressibilità dell'acqua, chiudendola in un globo di oro che sopra un'incudine fu sottoposto a ripetuti colpi di martello; ma il liquido trapelando pei pori del metallo, prima che il globo avesse ricevuto notevole alterazione di figura, lasciò dubbio il risultamento dell'esperienza.

Nel 1761 John Canton fece nuove ricerche sulla compressibilità dell'acqua, e fra le tante sperienze da lui eseguite rammentiamo la seguente, perchè esente da ogni obbiezione. Egli prese un tubo da termometro, e diviso il cannello in parti di eguale capacità, determinò il rapporto che questa aveva colla capacità della pallina, affinchè fosse noto il volume dell'acqua di cui voleva riempirlo. Così preparato il tubo, ne immergeva la pallina e gran parte del cannello in una vaschetta di acqua, onde farne assorbire il calore che poteva svolgersi sotto la compressione; e chiudeva tutto questo apparecchio in un recipiente di aria. La quale fortemente compressa lasciava vedere una diminuzione nella colonna di acqua contenuta nel tubo; l'acqua si era dunque ristretta, poichè se fosse stata incompressibile, avrebbe dovuto presentare un apparente aumento di volume, stante che la pressione sulla materia del tubo vi produceva una diminuzione nella capacità interna [1].

[1] Allorchè un tubo è sottoposto ad una pressione che normalmente agisce su tutti i punti della superficie sì esterna che interna, la sua capacità viene di tanto diminuita, di quanto sotto la stessa pressione sarebbe diminuito un egual volume della medesima sostanza. Ed in vero, supponiamo che in vece di avere una cavità interiore, il tubo fosse un cilindro massiccio; allora una pressione esterna ne farebbe diminuire l'intero volume, e nella serie degli strati successivi da fuori in dentro vi sarebbe una diminuzione di raggio nelle sezioni normali all'asse del tubo. Or immaginando ripristinata la cavità interiore, quell'ostacolo che la sua super-

Se le sperienze di Canton mettevano fuori dubbio la compressibilità dell'acqua, non erano egualmente decisive rispetto al valore della diminuzione di volume, che se ne poteva dedurre. Bisognavano in conseguenza nuove ricerche, e Perkins l'eseguì col suo *piezometro* rappresentato dalla *fig.* 178. AB è un forte cilindro chiuso da un pezzo metallico che vi è fermato con viti; e pel quale passa a strofinio l'asta metallica *cd*, che porta l'anello *e* destinato ad indicare la quantità di cui sotto una forte pressione l'asta penetra nel cilindro già pieno di acqua. Perkins situava il piezometro in un cannone di ferro fuso, la cui bocca era chiusa da un turacciolo a vite, il quale provveduto di una valvola caricata di un peso equivalente a 100 atmosfere lasciava passare il tubo di una tromba comprimente. La pressione fatta dalla tromba sull'acqua del cannone spingeva l'asta dentro al piezometro, e dalla corsa dell'anello *e* si argumentava la quantità della compressione patita dall'acqua contenuta in AB. In tal modo si aveva una diminuzione di 0,000026 del volume primitivo per una pressione eguale ad un'atmosfera. Poichè il modo onde l'asta *cd* passava pel turacciolo del piezometro lasciava qualche dubbio sull'esattezza dei risultamenti, Perkins sostituì all'asta una valvoletta mobile da fuori in dentro: così l'acqua penetrava sotto sufficiente pressione nel tubo AB, ma dopo cessata l'azione comprimente la valvola ne impediva l'uscita. In tal modo la diminuzione di volume veniva dedotta dall'aumento di peso del piezometro; e con questo secondo metodo Perkins ebbe una diminuzione di 0,000048 del volume primitivo sotto la pressione di un atmosfera.

Nuove ricerche furono fatte nel 1823 da OEretd col piezometro rappresentato dalla *fig.* 179. Si compone di un forte recipiente di vetro *a* terminato dal tubo capillare *c* diviso in parti

ficie nel restringersi riceveva dallo strato seguente, lo troverà egualmente in quella pressione che abbiamo supposta agire sulla faccia interna del tubo, e perciò se il raggio della sezione diveniva più corto nel primo caso, lo sarà anche nel secondo, vale a dire che la capacità del tubo resterà diminuita.

di eguale capacità, e di cui si è determinato il rapporto con quella del recipiente *a*. L'apparecchio è pieno di acqua, la cui colonna nel tubo capillare è sormontata dalla goccia *m* di mercurio che serve da indice. Alla stessa tavoletta, che porta il piezometro, è fermato il tubo *b* chiuso nell'estremità superiore ed aperto nell'inferiore: questo tubo è pieno di aria, e come manometro fa valutare la pressione. Il piezometro si pone nel cilindro *a* (*fig.* 180) di cristallo, alla cui apertura è fermata la ghiera metallica *e* col corpo di tromba *l*. Il cilindro *a* è pieno di acqua, sulla quale poggia lo stantuffo *m* che si fa discendere per mezzo della vite *s*. L'imbuto *g* somministra l'acqua al cilindro *a*, e pel foro *i* ne viene espulsa l'aria.

I metodi fin'ora esposti per determinare la compressibilità dell'acqua dovevano necessariamente presentare un valore minore del vero, perchè non si aveva in conto la diminuzione della capacità interna del piezometro sotto gli sforzi della pressione. Poisson ha dimostrato che la capacità *c* del piezometro diviene

$$c\left(1-\frac{5d}{2}\right)$$

sotto la pressione *p* fatta sull'unità di superficie, e che accorcerebbe di *d* la lunghezza di una verga della medesima sostanza. Con questa correzione furono ripetute le ricerche sulla compressibilità da Colladon e Sturm nel 1832. Essi cominciarono dal determinare la quantità di cui si comprimeva il vetro, donde era formato il loro piezometro, per ogni valore di pressione equivalente ad un'atmosfera. Questa compressione essi la deducevano dall'allungamento che per uno sforzo eguale riceveva un cilindro di vetro. Sostituendo alla vite *s* (*fig.* 180) una tromba comprimente e facendo il cilindro *a* abbastanza forte, le sperienze poterono estendersi fino a 24 atmosfere. Nella tavola seguente se ne leggono i risultamenti comparati a quelli di OErsterd.

NOMI DELLE SOSTANZE	COMPRESSIBILITA' PER UN'ATMOSFERA valutata in millionesimi del volume primitivo.	
	COLLADON E STURM.	OERSTED.
Mercurio	3,38	2,65
Acido solforico . .	30,35	»
Acido nitrico. . .	30,55	»
Solfuro di carbonio.	»	31,65
Ammoniaca . . .	33,05	»
Acido acetico. . .	40,55	»
Acqua non privata di aria	47,85	»
Acqua privata di aria	49,65	46,65
Etere nitrico . . .	69,85	»
Essenza di terebentina	75,35	»
Etere acetico . . .	77,65	»
Etere idroclorico .	84,25 p. la 1a atm. . .	»
Id.	80,69 p. la 9a atm. . .	»
Alcool	94,95 p. la 1a atm. . .	21,65
Id.	91,85 p. la 9a atm. . .	»
Id.	87,35 p. la 24a atm. . .	»
Etere solforico a 1°.	131,35 p. la 1a atm. . .	61,65
Id.	120,45 p. la 24a atm. . .	»
Id. a 11° . .	148,35 p. la 1a atm. . .	»
Id.	139,35 p. la 24a atm. . .	»

CAPO SECONDO.

Dipendenza del grado del suono dalla quantità di vibrazioni fatte dal corpo sonoro — Suoni di combinazione del Tartini — Tuoni della scala armonica. Temperamento.

153. Se ad una morsa fermiamo una lamina elastica per uno dei suoi estremi, e curvandola per l'altro l'abbandoniamo a se stessa, prima di restituirsi all'equilibrio essa compirà una serie di oscillazioni che potremo facilmente numerare, e che non saranno accompagnate da verun suono distinto, se la lamina sia lunga a sufficienza. Ripetendo più volte l'esperimento con diminuire suc-

cessivamente la lunghezza della lamina, si vedrà aumentare il numero delle vibrazioni fatte nel medesimo tempo; e quando esse saranno divenute celeri abbastanza per produrre un suono, troveremo che questo sarà più acuto, come la lamina diverrà più corta, vale a dire come aumenterà il numero delle vibrazioni. Esiste dunque una relazione tra il grado del suono ed il numero delle vibrazioni eseguite dal corpo sonoro in un dato tempo.

La ricerca di questa relazione costituisce un problema meccanico, la cui soluzione relativamente alle corde vibranti cominciata da Taylor è stata poi successivamente perfezionata da Bernoulli, D'Alembert, Eulero, Lagrangia; e pei lavori di questi grandi geometri si è conosciuto che chiamando l la lunghezza della corda, r il suo raggio, d la sua densità, P il peso equivalente alla tensione, N il numero di vibrazioni fatte in 1″, π il rapporto della circonferenza al diametro e g la forza di gravità, si ha l'equazione

$$N=\frac{1}{rl}\sqrt{\frac{gP}{\pi d}},$$

dalla quale è facile dedurre i seguenti corollari.

— 1.° I numeri di vibrazioni fatte da una corda sotto una tensione costante sono in ragione inversa della sua lunghezza.

— 2.° I numeri di vibrazioni di una corda per una data lunghezza sono direttamente proporzionali alle radici quadrate delle tensioni.

— 3.° Supponendo costanti le lunghezze e le tensioni, i numeri di vibrazioni delle corde omogenee saranno inversamente proporzionali ai loro raggi o diametri.

— 4.° I numeri di vibrazioni delle corde di diversa natura, supponendo eguali lunghezza, tensione e diametro, dovranno seguire la ragione inversa delle radici quadrate delle densità.

Concessa la realtà del 1° corollario (realtà che qui appresso vedremo dimostrata dagli sperimenti sulla *sirena* di Cagnard-la Tour) sarà facile determinare i rapporti dei numeri di vibrazioni pei diversi tuoni della scala musicale. Serve a ciò l'istrumento

detto *sonometro*, composto da una cassa sonora, sulla quale è fermata una corda con un certo grado di tensione: un ponticello mobile, cui la corda non giunge se non premuta con un dito, scorre sopra una linea divisa in parti eguali e segnata sul fondo superiore della cassa parallelamente alla direzione della corda. Fatta questa vibrare tra due punti fissi distanti quanta è la lunghezza della linea graduata, si prenda il suono prodotto pel *do* della gamma naturale: indi si avanzi il ponticello, finchè dalla lunghezza ridotta della corda si abbia il suono successivo *re*, e si numerino le parti della linea graduata che allora comprende la lunghezza della corda: si faccia altrettanto pei rimanenti suoni della gamma, e si avrà la seguente serie di lunghezze, riferite a quella del suono fondamentale come unità.

Suoni della gamma	*do*,	*re*,	*mi*,	*fa*,	*sol*,	*la*,	*si*,	*do*
Lunghezze della corda	1,	$\frac{8}{9}$,	$\frac{4}{5}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{5}$,	$\frac{8}{15}$,	$\frac{1}{2}$.

E dovendo pel 1° corollario i numeri di vibrazioni essere inversamente proporzionali alle lunghezze delle corde, per questi numeri relativamente ai suoni della gamma avremo i seguenti rapporti

do,	*re*,	*mi*	*fa*,	*sol*,	*la*,	*si*,	do_2
1	$\frac{9}{8}$,	$\frac{5}{4}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{5}{3}$,	$\frac{15}{8}$,	2.

Quindi se riduciamo tutti questi numeri al loro denominatore comune 24, avremo che mentre *do* fa 24 vibrazioni, *re* ne farà 27, *mi* 30, *fa* 32, *sol* 36, *la* 40, *si* 45, e do_2 ottava del primo ne farà 48. Donde rileviamo ancora che un suono passa all'ottava acuta raddoppiando il numero di vibrazioni fatte in un medesimo tempo: quindi per la 2ª, 3ª, 4ª ec. ottava, i numeri di vibrazioni saranno 4, 8, 16 ec. volte più grandi di quello corrispondente al suono primitivo.

Questi risultamenti numerici del 1° corollario offrono un criterio di realtà pel 2°. Tendendo la corda del sonometro con pesi

attaccati ad una delle sue estremità, troveremo che per una medesima lunghezza, onde avere i suoni della gamma fino all'ottava acuta, bisognerà far variare i pesi nella ragione dei numeri

$$\begin{matrix} do_1, & re_1, & mi_1, & fa_1, & sol_1, & la_1, & si_1, & do_2 \\ 1, & \frac{81}{64}, & \frac{25}{16}, & \frac{16}{9}, & \frac{9}{4}, & \frac{25}{9}, & \frac{225}{64}, & 4; \end{matrix}$$

ossia, riducendoli tutti al denominatore comune 576,

$$\begin{matrix} do, & re, & mi, & fa, & sol, & la, & si, & do_2 \\ 476, & 729, & 800, & 1024, & 1296, & 1600, & 2025, & 2204. \end{matrix}$$

Or questi numeri sono proporzionali ai quadrati delle ragioni inverse delle lunghezze della corda, ossia ai quadrati delle ragioni dirette dei numeri di vibrazioni. Dunque se è reale il primo corollario, lo sarà eziandio il secondo.

La scienza deve a Cagnard Latour l'invenzione di un apparecchio, col quale potendosi determinare la quantità assoluta di vibrazioni fatte dal corpo sonoro in un dato tempo per produrre un dato suono, si è potuta dimostrare la realtà del 1° corollario, e quindi l'esattezza della formola, dond'esso deriva. L'istrumento di cui parliamo, è la *sirena*, così denominata perchè può suonare immersa nell'acqua. Essa è rappresentata dalla *fig.* **181**. A è una cassa cilindrica di rame del diametro di 8 a 10 centimetri e di 3 di altezza. Sul fondo superiore *cc'* perfettamente piano poggia l'asse *g* ritenuto nell'altro estremo dalla traversa *n*; ed al fondo inferiore è annesso il tubo B, pel quale s'introduce una corrente di aria. L'asse *g* porta una vite perpetua *i*, la quale ingrana colla ruota *m'* che ha 100 denti, ed è provveduta di un' appendice che ad ogni giro fa progredire un dente della ruota *m*. Fermato al medesimo asse *g* è il disco *ee'*, la cui faccia inferiore levigata tocca dolcemente la faccia superiore della cassa A: questo disco gira coll'asse, ed in conseguenza compie un'intera rivoluzione ogni volta che la ruota *m'* avanza di un dente. Alle due ruote sono congiunti gl'indici *d* e *d'* (*fig.* 182), dei quali il secondo numera i giri del disco *ee'*, e l'altro le centinaia di giri. Sul fondo *cc'*

vi sono parecchi fori *v* (*fig.* 183), ed altrettanti *u* ch'esattamente corrispondono ai primi se ne trovano sul disco *ee'*; e vi sono scolpiti in modo che quando le loro luci combaciano, i loro assi invece di essere per dritto formano un angolo ottuso.

L'apparecchio si mette in azione facendovi penetrare pel tubo B una corrente di aria, la quale nell'uscire dai fori *v* urta sulle pareti inclinate dei fori *u*, e quindi mette in movimento il disco *ee'* con una velocità corrispondente a quella che ha l'aria entrando nella cassa A. Immaginiamo che sulla lamina *cc'* vi sia un solo foro, e 10 ne abbia il disco *ee'*: ad ogni giro il disco avrà 10 volte interrotta la corrente di aria, e 10 volte l'avrà ristabilita; l'aria dunque sarà stata 10 volte condensata ed altrettante rarefatta, vale a dire che saranno avvenute 10 ondulazioni le quali succedendosi con bastante celerità avranno prodotto un suono. E se in vece di un sol foro sulla lamina *cc'* ne immaginiamo ancora 10, vi saranno allora ad ogni decimo di giro 10 onde contemporanee, vale a dire che vi sarà un suono altrettanto più forte: adunque i fori *u* determinano sotto una data celerità della corrente il grado del suono, i fori *v* ne definiscono la forza.

Quando colla sirena si vuol determinare la quantità assoluta di vibrazioni donde risulta un dato suono, si comincia dal separare, spingendo il bottone *b'*, la ruota *m'* dalla vite *i'*, affinchè l'asse possa girare lasciando le ruote in quiete. Indi si spinge la corrente pel tubo B, e si anima al segno da mettere all'unisono il suono della sirena, e quello di cui si vuol conoscere il numero di vibrazioni per 1''. Allora in un medesimo istante si spingerà il bottone *b* onde la ruota *m'* ingrani colla vite *i*, e si darà moto ad un pendolo che batte i secondi. Fatto agire l'apparecchio per qualche minuto, si arresteranno nel tempo stesso il pendolo e la ruota *m'*: sul quadrante dell'orologio si leggerà il tempo in minuti secondi, e gl'indici *d* e *d'* daranno il numero dei giri, che moltiplicato pel numero dei fori che porta il disco *ee'* farà conoscere la quantità delle ondulazioni; basterà dunque dividere il secondo numero pel primo e moltiplicare il quoziente

per 2 per avere la quantità di vibrazioni per ogni minuto secondo, poichè la somma di un'onda condensata e di un'onda rarefatta corrisponde a due vibrazioni del corpo sonoro.

L'esattezza della relazione trovata dal calcolo tra il grado del suono ed il numero corrispondente di vibrazioni può essere ancora confermata dalla *ruota dentata* di Savart. Per la gola della ruota A (*fig.* 184) passa una corda che avvolge una carrucola fermata all'asse *c* della ruota B. Questa ha la circonferenza guernita di molti denti, i quali urtano contro una sottile laminetta, un pezzo di carta per esempio, quando il moto di rotazione viene per mezzo della corda trasmesso dalla ruota A alla B. Negli sperimenti che si fanno con questa macchina, osservasi che cominciando il moto con una debole velocità, si ha la sensazione di una serie di colpi successivi, la quale va poi gradatamente trasformandosi in un suono continuato e sempre più acuto, a misura che la celerità aumenta.

Conosciuto il diametro della ruota A e quello della carrucola fermata all'asse *c*, sarà facile calcolare il numero di giri che questo avrà fatto, quando A ne ha compiuto un solo. Or il numero dei giri dell'asse, moltiplicato pel numero dei denti della ruota B, rappresenta la quantità di urti ricevuti dalla laminetta; e poichè ad ogni urto corrispondono due vibrazioni, il numero di queste si otterrà raddoppiando il prodotto precedente. Così per un dato suono, cui la ruota dentata sarà messa all'unisono, riuscirà facile calcolare il numero di vibrazioni eseguite in un dato tempo.

Uno dei risultamenti più rimarchevoli ottenuti da Savart colla sua ruota dentata è quello che ha dichiarato l'esistenza di una relazione tra la percettibilità dei suoni acuti e la loro intensità. Tutti i fisici convenivano sull'esistenza di un limite di acutezza, oltre il quale il suono non si sarebbe più avvertito dall'orecchio, ma non erano poi di accordo sul valore di questo limite: Chladni lo fissava a 12000 vibrazioni per secondo, Biot a 8192, e Wollaston tra 18000 e 21000. Savart facendo agire nel suo apparecchio ruote dentate di 24,48 e 82 centimetri di

diametro, ha trovato colla prima ruota un limite di percettibilità tra 6000 e 8000 vibrazioni per secondo, tra 24000 e 30000 colla seconda, e dalla terza ottenne suoni sensibili fino a 48000 vibrazioni per secondo. Or l'aumento del diametro delle ruote non faceva che accrescere l'intensità dell'urto, e con essa l'ampiezza della vibrazione; dunque se i suoni troppo acuti divengono insensibili, ciò dipende dalla debole impressione ch'essi fanno sull'orecchio.

Si vi è un limite di percettibilità pei suoni acuti, avvene un altro ancora pei suoni gravi, dipendente dalla stessa cagione. Si ammetteva non esser sensibile un suono più grave di quello che fa 32 vibrazioni a secondo, quando Savart ne ottenne di quelli che appena ne compiono 16 nel medesimo tempo. Egli usava di una spranga di ferro od anche di legno (*fig.* 185) mobile intorno ad un asse orizzontale, e che nella sua rotazione passava tra due laminette di legno, distanti dalla spranga di circa 2 millimetri. Ad ogni passaggio si udiva come un'esplosione, la quale rimaneva distinta dalle altre che la seguivano, quando la spranga lentamente girava; ma spingendo la rotazione al segno di avere 7 in 8 passaggi per secondo, la serie delle esplosioni diveniva un suono continuato e forte. Or ad ogni esplosione si avevano due vibrazioni l'una per la semionda condensata l'altra per la semionda rarefatta; dunque la spranga sostituita alla ruota dentata, rendeva sensibile un suono di 16 vibrazioni a secondo.

Essendo la celerità del suono indipendente dal suo grado, ossia dal numero di vibrazioni fatte dal corpo sonoro nell'unità di tempo, ne segue che data la celerità di trasmissione ed il numero di vibrazioni, sarà facile determinare la lunghezza di ciascun'onda sonora. Così essendo alla temperatura media dell'atmosfera la celerità del suono nell'aria di circa 340 metri a secondo, la lunghezza di ciascuna delle 24000 onde sonore che Savart otteneva dalle 48000 vibrazioni prodotte dalla ruota dentata, era di $\frac{340^{m}}{24000} = 0^{m},0142$; e ciascuna delle 8 onde sono-

re risultanti dalle 16 vibrazioni eccitate dalla spranga di ferro, aveva la lunghezza di $\frac{340^m}{8} = 42^m,5$.

154. La ruota dentata di Savart ci ha fatto conoscere che il suono si compone di una serie celerissima di urti, la quale non altrimenti possiamo concepire che agisca sull'orecchio se non colla continuata successione degl'impulsi prodotti dalle onde condensate. Or immaginiamo che due suoni continuati, come quelli che possono prodursi da due canne di un organo o da due diversi diapason, presentino nella serie delle loro ondulazioni un periodo di coincidenze, dimodochè ogni m^{esima} onda del primo ed ogni n^{esima} del secondo vengano contemporaneamente a colpire l'orecchio; allora se le coincidenze sono abbastanza vicine avremo la sensazione di un terzo suono nascente dalla combinazione dei due primi. Poniamo per esempio che si facciano cantare nel tempo stesso do_2 e sol^2; il primo suono, com'è noto, farà 2 vibrazioni mentre il secondo ne farà 3; dunque ad ogni 2 vibrazioni del primo e 3 del secondo vi sarà una coincidenza, la cui serie facendo la metà delle vibrazioni di do^2 e la terza parte di sol_2, produrrà necessarjamente do_1. Ed in vero mentre cantano do_2 e sol_2, l'orecchio realmente avverte do_1, ossia l'ottava grave di do_2.

Di questi suoni di combinazione ha fatto primieramente menzione il Tartini nel suo trattato di musica pubblicato nel 1754, e perciò sono conosciuti sotto il nome di *suoni di Tartini*. Ma dovevano esser conosciuti prima, dapoichè venivano all'uopo nell'accordare le canne degli organi; essendo, secondo un'ingegnosa comparazione del Weber, i suoni di combinazione per l'orecchio ciò che un nonio è per l'occhio: col nonio si misurano le piccole frazioni lineari, coi suoni di combinazione si può valutare la differenza di tempo tra due vibrazioni, ciascuna delle quali non dura che qualche millesimo di secondo. Scheibler usando di questi suoni qual mezzo di rendere più perfetto l'accordo degli strumenti musicali, ha pututo valutare la differenza di $\frac{1}{15000}$ nella durata di due vibrazioni.

Nel modo col quale si producono i suoni di combinazione sta la ragione dei seguenti fatti acustici. — 1° Poniamo che si facciano cantare nel tempo stesso do_1, do_2, sol^2, do_3, mi_3, vale a dire una serie di suoni le cui vibrazioni contemporanee siano proporzionali ai numeri 1, 2, 3, 4, 5: in tutta questa consonanza un orecchio non molto esperto non avvertirà che do_1, vale a dire il suono più grave; e lo stesso effetto avrà luogo, se taluni soltanto dei cinque suoni vengano prodotti, purchè tra i suoni consonanti vi sia do_1. Ciò dipende dall'esser le coincidenze dirette tutte al suono più grave, che ne riceve in conseguenza tale rinforzo da oscurare tutti gli altri nella sensazione: ed in vero combinando 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4 i suoni rappresentati dai numeri 2, 3, 4, 5 avremo sempre lo stesso suono 1 di combinazione, vale a dire il più grave della serie. — 2° È noto che l'unione di un suono colla sua terza, quinta ed ottava, forma un accordo, e che rappresentando con 1 il suono più grave, la terza sarà $\frac{5}{4}$, la quinta $\frac{3}{2}$ e l'ottava 2. Or in vece di prendere ad unità il suono fondamentale, facciamo = 1 la sua doppia ottava grave, allora alla serie dei suoni dati $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2$ sarà sostituita l'altra 4, 5, 6, 8 i quali tutti coincidono a produrre il suono 1. È assai probabile che in questa tendenza a produrre unico suono stia la ragione prima di quella grata sensazione ch'esprimiamo col nome di *accordo* o *consonanza*; tanto più che se nella serie dei suoni armonici sopprimiamo la terza avremo 1, $\frac{3}{2}$, 2 che si riducono ai numeri interi 2, 3, 4 prendendo ad unità la prima ottava grave del suono fondamentale, e non già la doppia ottava come nel primo caso; il punto dunque cui convengono i tre suoni armonici si approssima più ai termini della loro serie, mentre da un altro lato il fatto dimostra che l'unione del suono fondamentale colla quinta e l'ottava produce una consonanza più perfetta.

Se la coincidenza delle ondulazioni produttrici di due suoni

diversi non si ripetesse con sufficiente celerità, in vece di un suono di combinazione si avrebbe una serie di battimenti, simile in certo modo al rullare di un tamburo. Poniamo per esempio, che si facciano cantare *la* e *la*♯, i quali suoni, come qui appresso vedremo, hanno il rapporto di 24 a 25 vibrazioni; e che il *la* faccia 110 vibrazioni a secondo. Poichè la 24ª vibrazione di *la* deve coincidere colla 25ª di *la*♯, non vi saranno che 4 coincidenze a secondo, che l'orecchio percepirà sotto forma di 4 battimenti distinti.

Non sempre il numero dei battimenti è eguale a quello che si deduce dai numeri di vibrazioni che i due suoni fanno nello stesso tempo: può talvolta il numero delle coincidenze esser maggiore, e dare in conseguenza un suono più acuto di quello che si è calcolato. Immaginiamo, per esempio, che uno dei suoni dati faccia 3 vibrazioni mentre l'altro ne fa 11: secondo il calcolo delle coincidenze per onde intere il suono risultante dalla loro combinazione sarebbe 1. Purtuttavia quando il primo è a $\frac{3}{8}$ di una vibrazione, il secondo ne compie $\frac{11}{8} = 1 + \frac{3}{8}$: dunque le due serie di ondulazioni, oltre il periodo in numeri interi, ne hanno un altro frazionario, pel quale il suono di combinazione farà 8 vibrazioni, mentre il primo dei suoni generatori ne fa 3 ed 11 il secondo. In generale chiamiamo n ed n' i numeri contemporanei di vibrazioni dei due suoni dati, ed x quello corrispondente al suono di combinazione: mentre quest'ultimo eseguirà la frazione di vibrazione $\frac{1}{x}$, gli altri faranno $\frac{n}{x}$, $\frac{n'}{x}$. Supponiamo che tra n, n' ed x esista la relazione

$$\frac{n'}{x} = 1 + \frac{n}{x},$$

per la quale quando il primo dei suoni dati avrà fatto la frazione di vibrazione $\frac{n}{x}$, l'altro avrà compiuta una vibrazione più la stessa frazione $\frac{n}{x}$. In questa ipotesi si avrà nelle x vibrazioni un suono di combinazione, ed il suo valore dedotto dal-

l'equazione precedente sarà $x = n' - n$: così nell'esempio precedente si ha $n' = 11$, $n = 3$, $x = 11 - 3 = 8$. Hallström, cui è dovuta questa teoria, ha fatto ancora osservare che il suono di combinazione risultante da due suoni dati, può combinarsi con ciascuno di essi e produrne un secondo, come da questo congiunto ai precedenti può venirne un terzo, e così di seguito; e da sperienze appositamente eseguite egli ha rilevato che l'orecchio non percepisce ordinariamente che un solo di tutta la serie dei suoni di combinazione, e propriamente quello che per la natura dei suoni dati può meglio spiccare tra gli altri congeneri. Scheibler però ha osservato che quando le coincidenze sono abbastanza lontane per poterne numerare i battimenti, questi sono sempre metà di quelli dati dalla formola di Hallström; ed egli assegna a questa divergenza una ragione tolta dalla natura stessa delle ondulazioni. Poichè se i battimenti risultano da coincidenze di onde diversamente lunghe, segue che se la prima coincidenza avviene per due fasi identiche di vibrazioni, la seconda avverrà per due fasi opposte, la quale sarà seguita da una terza simile alla prima, ec. come si rileva dalla *fig.* 186 nella quale le fasi di vibrazione sono rappresentate dalle opposte inflessioni di una curva: la linea piena rappresenta le fasi di vibrazioni di un suono che ne fa 3 a secondi, quella composta di lineette figura un suono che ne fa quattro, e finalmente la linea a punti rappresenta la serie delle coincidenze, e per la quale si osserva che tra i due massimi m e g vi ha un minimo v. Or l'orecchio non può avvertire sotto forma di battimenti che i soli massimi, i quali vengono così a presentarsi sotto un numero metà di quello delle coincidenze.

155. Abbiamo veduto (nº 153) in qual modo i suoni della gamma naturale si possono rappresentare per mezzo di numeri proporzionali alle quantità di vibrazioni compiute in un medesimo tempo. Or se di questi numeri dividiamo il secondo pel primo, il terzo pel secondo, ec. avremo i così detti *intervalli* dei suoni, denominati ancora *toni*, quali si osservano nella terza delle serie seguenti.

Nomi dei suoni..... do_1, re_1, mi_1, fa_1, sol_1, la_1, si_1, do_2

Numeri di vibrazioni.. 1, $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{15}{8}$, 2.

Intervalli..... $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{16}{15}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$; $\frac{9}{8}$, $\frac{16}{15}$.

Gl'intervalli rappresentati da $\frac{9}{8}$ si dicono *toni maggiori*, e *toni minori* quelli espressi da $\frac{10}{9}$; poichè i primi superano l'unità di $\frac{1}{8}$ ed i secondi di $\frac{1}{9}$, e $\frac{1}{8}$ è maggiore di $\frac{1}{9}$: gl'intervalli poi rappresentati da $\frac{16}{15}$ si dicono *semitoni maggiori*, poichè superano l'unità di $\frac{1}{15}$, che presso a poco è la metà di $\frac{1}{8}$. Nell'estensione dunque di un'ottava vi sono 3 toni maggiori, 2 toni minori e 2 semitoni maggiori.

Comparando un tono maggiore ad un minore si ha l'intervallo

$$\frac{9}{8} : \frac{10}{9} = \frac{81}{80},$$

che dicesi *comma*, ed è riguardato come una quantità trascurabile, perchè l'orecchio non trova differenza sensibile tra due suoni, uno dei quali fa 80 vibrazioni mentre l'altro ne fa 81. Quindi vengono riguardati come eguali tanto i toni maggiori che i minori.

Comparando similmente un tono minore ad un semitono maggiore, si ha l'intervallo

$$\frac{10}{9} : \frac{16}{15} = \frac{25}{24};$$

e tra un tono maggiore ed il semitono si ha l'altro intervallo

$$\frac{9}{8} : \frac{16}{15} = \frac{135}{128} = \frac{135.15}{128.15} = \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}.$$

E poichè il fattore $\frac{81}{80}$ è riguardato eguale all'unità, così diremo che un tono qualunque, sia maggiore o minore, sarà au-

mentato di un semitono, quando il numero delle sue vibrazioni sarà cresciuto nel rapporto di 25 a 24, e viceversa nel caso della diminuzione. Nella scrittura musicale l'aumento di un semitono è rappresentato dal segno ♯ che dicesi *diesi*, e la diminuzione dal *bemollo* ♭: sì l'uno che l'altro *accidente* si fa precedere alla *nota* del suono che dev'esserne modificato.

Poichè tutti i toni possono riguardarsi eguali, non che i semitoni, potremo rappresentare i primi con 1 ed i secondi con $\frac{1}{2}$; e così la gamma naturale verrà semplicemente espressa come segue.

$$\begin{array}{cccccccc} do_1, & re_1, & mi_1, & fa_1, & sol_1, & la_1, & si_1, & do_2. \\ & 1\ , & 1\ , & \frac{1}{2}\ , & 1\ , & 1\ , & 1\ , & \frac{1}{2}\ . \end{array}$$

Donde rileviamo che nella gamma naturale i toni si trovano ordinati in modo che due toni precedono un semitono, a questo seguono tre toni, e finalmente un semitono chiude la serie. Volendo cominciare la scala da qualunque altro termine della serie, dovremo sempre soddisfare alla stessa legge: così cominciando la scala da *sol*, avremo

$$\begin{array}{cccccccc} sol & la & si & do & re & mi & fa & sol\ ; \\ & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

vale a dire che l'ordine nella successione dei toni è alterato da *mi* a *fa*, il quale è un semitono, mentre dovrebbe essere un tono. Allora aggiungendo un *diesi* a *fa*, la successione dei toni sarà simile alla gamma naturale, ed avremo la scala corretta

$$\begin{array}{cccccccc} sol & la & si & do & re & mi & fa\sharp & sol \\ & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}\ . \end{array}$$

Similmente cominciando le scale da *re*, *mi*, *fa*, ec. si avranno le serie

$$\begin{array}{cccccccc} re & mi & fa\sharp & sol & la & si & do\sharp & re \\ & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}\ ; \end{array}$$

mi fa♯ sol♯ la si do♯ re♯ mi

$1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{2}$.

fa sol la si♭ do re mi fa

$1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{2}$.

Tutte le scale simili a quella di *do* si dicono in *terza maggiore*, ed il terzo suono della serie ha col suono fondamentale il rapporto $\frac{5}{4}$, vale che il terzo fa 5 vibrazioni, mentre il primo ne fa 4. Ciò è evidente per la scala di *do*, e facilmente si dimostra rispetto alle altre. Prendiamo ad esempio quella di *sol*: *si*, che n'è la terza, fa un numero di vibrazioni rappresentato da $\frac{15}{8}$, e quello di *sol* è $\frac{3}{2}$; dividendo il primo pel secondo si ha $\frac{15}{8} : \frac{3}{2} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}$. Togliamo ancora ad esempio la scala di *re*: la sua terza è *fa♯* che sarà rappresentato da $\frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{25}{18}$, poichè il *diesi* aggiunto ha aumentato il rapporto $\frac{4}{3}$ nella ragione di 25 a 24. Dividendo $\frac{25}{18}$ valore di *fa* per $\frac{9}{8}$ ch'è il valore di *re*, si ha il quoziente $\frac{25.8}{18.9}$, irreducibile a $\frac{5}{4}$, poichè il rapporto esatto di un semitono ad un tono maggiore non è esattamente $\frac{25}{24}$, ma $\frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}$. Restituendo al quoziente il fattore $\frac{81}{80}$ che si è soppresso nel dividendo, avremo $\frac{25.8.81}{18.9.80} = \frac{5}{4}$. E similmente per ogni altra scala in 3ª maggiore si dimostra che questa fa 5 vibrazioni mentre il suono fondamentale ne fa 4.

Ma se cominciamo la scala da *la*, e serbiamo l'ordine seguente

la₁ si₁ do₂ re₂ mi₂ fa₂♯ sol₂♯ la₂;

$1 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{2}$

l'orecchio resterà soddisfatto, quantunque la successione dei suoni sia sul principio diversa da quella che costituisce la gamma *do*. In questa seconda classe di scale, distinte dall'aggiunto *in* 3ª *minore*, il 3º suono è $\frac{6}{5}$ del suono fondamentale. Così sappiamo che *la* è rappresentato da $\frac{5}{3}$, e do_2 da 2; e dividendo il secondo numero pel primo abbiamo il quoziente $\frac{6}{5}$. Lo stesso quoziente avremmo per ogni altra scala in 3ª minore.

Le scale in 3ª maggiore ci hanno dato la terza di suono $= \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ e per quelle in 3ª minore abbiamo avuto $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$; e poichè $1 + \frac{1}{4}$ è più grande di $1 + \frac{1}{5}$, le prime si son dette 3ᵉ *maggiori* e le seconde 3ᵉ *minori*.

156. Supponiamo un istrumento a suoni fissi, come l'arpa, il gravicembalo, ec. accordato in modo che tutte le terze consecutive di *do*, siano esatte, vale a dire ch' essendo la 1ª terza $mi_1 = \frac{5}{4} do_1$, sia ancora la 2ª terza $sol_1\sharp = \frac{5}{4} mi$, la 3ª $do_2 = \frac{5}{4} sol\sharp$ ec. Sarà in questa ipotesi $do_2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = 1{,}953125$: ma sappiamo d'altronde che $do_2 = 2$; dunque nell'ipotesi dell'eguaglianza dei toni se sono esatte le terze, saranno false le ottave.

Cominciando tuttavia da do_1, fingiamo esatte tutte le quinte consecutive. La 1ª di esse è $sol_1 = \frac{3}{2}$; e poichè la 12ª quinta corrisponde a do_8, sarebbe $do_8 = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129{,}75$. Or sappiamo che $do_8 = 2^7 = 128$: dunque se vogliamo le quinte esatte, le ottave dovranno essere necessariamente false.

Or l'orechio non soffre la menoma alterazione nelle ottave; dovendo dunque conservarle esatte, sarà necessario alterare gli altri due suoni armonici, le terze e le quinte. I metodi proposti per attenuare quest'alterazione più che sia possibile, vanno conosciuti sotto il nome di *temperamenti*, e tra questi si è adottato quello che consiste nel dividere i 5 toni e due semitoni della

gamma naturale in 12 semitoni eguali. Chiamando allora x l'intervallo di *do*♯ a do_1, x^2 sarà quello di *re* a do_1, x^3 tra *re*♯ e do_1, e finalmente x^{12} sarà il rapporto di do_2 a do_1. Ma $do_2 = 2$; dunque $x = \sqrt[12]{2}$. In tal modo in vece di $\frac{5}{4} = 1,25$ valore naturale della 1ª terza *mi*, avremo $x^4 = \sqrt[3]{2} = 1,25992$; e $\sqrt[12]{2^7} = 1,4983$ per la 1ª quinta *sol*, il cui valore naturale è $\frac{3}{2} = 1,5$. Dunque il temperamento apporta un piccolo aumento alla terza naturale, ed una piccola diminuzione nella quinta; e per lo stesso principio il semitono naturale $\frac{16}{15} = 1,066$ diviene $x = \sqrt[12]{2} = 1,05946$, un tono maggiore $\frac{9}{8} = 1,125$ si trasforma in $x^2 = \sqrt[6]{2} = 1,1235$, valore a cui si riduce ancora ogni tono minore $\frac{10}{9} = 1,111...$

Il temperamento non riguarda che gl'istrumenti a suoni fissi, poichè quelli che secondo la legge del continuo possono dare tutta la serie dei suoni dal grave all'acuto, come il violino, la voce umana ec. potranno sempre dare terze e quinte esatte; essi però debbono *temperare* quando concertano con istrumenti a suoni fissi, poichè all'opposto produrrebbero una dispiacevole dissonanza.

CAPO TERZO.

Leggi delle vibrazioni delle corde — delle verghe diritte — delle curve — delle lamine — dei fluidi elastici. — Comunicazioni del moto vibratorio.

157. Le corde possono vibrare in direzione normale alla loro lunghezza, ovvero nella direzione di questa: nel primo caso si hanno *vibrazioni trasversali*, e *longitudinali* nel secondo. Si ottengono le prime sia spingendo le corde, sia passandovi per traverso un arco di violino: le seconde poi si producono strofinando una corda nel senso della sua lunghezza colle dita impolve-

rate di colofonia, od anche passandovi un arco di violino assai obbliquamente.

158. L'esperienza dimostra che quando dalle vibrazioni trasversali di una corda si ottiene un suono grave e sostenuto, un orecchio esperto sentirà oltre il suono fondamentale l'ottava della sua quinta, la doppia ottava della sua terza, e sovente l'ottava e la doppia ottava dello stesso suono fondamentale. Rappresentiamo questo suono con $do^1 = 1$, l'ottava della sua quinta sarà $sol^1 = \frac{3}{2} \times 2 = 3$, $mi_3 = \frac{5}{4} \times 2^2 = 5$ sarà la doppia ottava della sua terza, e $do_2 = 2$, $do_1 = 2.2 = 4$ saranno l'ottava e doppia ottava di *do*. Dunque in un medesimo tempo la corda esegue quantità di vibrazioni proporzionali ai numeri 1, 2, 3, 4, 5. Or dalla formola data a *pag.* 393, e per la quale è dichiarata la relazione esistente tra lunghezza, diametro, tensione, densità e numero di vibrazioni prodotte in un dato tempo, risulta che per ottenersi contemporaneamente numeri di vibrazioni proporzionali a 1, 2, 3, 4, 5, debbono insieme all'intera lunghezza vibrare la metà, il terzo, il quarto ed il quinto di essa; come rispetto alla metà ed al quarto della lunghezza totale è rappresentato dalla *fig.* 187.

La possibilità di questa coesistenza di più vibrazioni indipendenti in una medesima corda è dichiarata dalla seguente sperienza fatta la prima volta da Sauveur. Si trasporti il ponticello mobile di un sonometro nel mezzo della corda ; si prema questa dolcemente con un dito in modo che appena tocchi l'orlo del ponticello, e si metta in vibrazione una delle sue metà: si vedrà l'altra vibrare egualmente, ed il suono prodotto sarà l'ottava acuta di quello che la corda rendeva quando era libera in tutta la sua lunghezza. Così la debole pressione fatta nel mezzo della corda ha impedito che vibrasse l'intera lunghezza, mentre ha lasciato libero il movimento delle due metà; e perciò il suono prodotto doveva necessariamente essere l'ottava superiore del primo. Si ripeta lo stesso sperimento, e si fermi il ponticello al terzo, al quarto, al quinto della lunghezza della

corda, e si avranno successivamente *sol*$_4$, *do*$_3$, *mi*$_3$; e per dimostrare che anche in questo caso gli estremi delle parti aliquote sono immobili, mentre vibrano i punti intermedî, Sauveur usò di un mezzo semplice ed ingegnoso. Egli piegava dei pezzetti di carta tolti da due fogli di diverso colore; poneva quelli di un colore nei punti della corda che giudicava dover rimanere immobili, ossia sui *nodi* di vibrazione, e adagiava gli altri sui *ventri* di vibrazione che avevano luogo nei punti intermedî: facendo vibrare la corda, i secondi pezzetti di carta cadevano tutti, i primi lasciavano immobili.

Questa disposizione delle corde a produrre suoni armonici del suono fondamentale rende ragione del seguente fatto. Ponendo l'una vicina all'altra ed in direzioni paralelle due corde omogenee, di egual diametro ed egualmente tese, e che l'una abbia una lunghezza aliquota di quella dell'altra; si osserverà che facendo vibrare la più corta, il movimento verrà per mezzo dell'aria comunicato all'altra, e le due corde vibreranno all'unisono.

E ciò rispetto alle vibrazioni trasversali: passiamo ora alle longitudinali. Supponendo che lo strofinio, il quale deve mettere la corda in vibrazione, cominci dall'estremo A e progredisca verso B (*fig.* 188); nello stesso senso le molecole verranno addensate in una parte e rarefatte nell'altra. E quando sarà cessata l'azione della forza perturbatrice, le forze continue da cui è retto l'equilibrio molecolare, faranno tornare le particelle della corda verso le prime posizioni con movimento accelerato, la cui massima velocità avrà luogo nei punti, che le molecole occupavano nello stato di equilibrio: esse dunque trascorreranno questi punti, finchè non siano gradatamente distrutte le velocità acquistate; e così tornando per la stessa via più volte di seguito, compiranno altrettante oscillazioni, le quali comunicate all'aria ambiente diverranno produttrici di suono.

Da quest'analisi degli effetti, che lo strofinio nel senso della lunghezza deve produrre sull'equilibrio molecolare di una corda, risulta che il movimento di traslazione delle falde della corda normali alla lunghezza, il quale è nullo negli estremi di essa

dovrà essere massimo nel mezzo; e che viceversa il movimento di condensazione e di alterna rarefazione dovrà essere massimo negli estremi e nullo nel mezzo. In questo dunque starà un ventre di vibrazione, e negli estremi della corda si troveranno due nodi.

Cercando teoricamente una relazione tra le quantità di vibrazioni longitudinali e trasversali che una corda può produrre, Poisson ha trovato l'equazione

$$n' = n \sqrt{\frac{l}{\alpha}},$$

nella quale n' disegna il numero delle vibrazioni longitudinali, n quello delle trasversali, l esprime la lunghezza della corda, ed α la quantità di cui essa si allunga per l'azione di una forza eguale a quella che ne produce la tensione. E poichè α è sempre piccolissima rispetto ad l, segue che n' dovrà essere assai grande in comparazione di n: ciò che va di accordo coll'esperienza la quale dimostra che i suoni prodotti dalle vibrazioni longitudinali sono sempre acutissimi.

159. Le verghe cilindriche e prismatiche possono eccitarsi a vibrazioni trasversali e longitudinali egualmente che le corde, ed ottenerne diversi suoni. Le vibrazioni trasversali si ottengono passandovi un arco di violino, e la verga potrà esser fermata in un'estremo, in tutti due, o in due parti diverse dagli estremi; ed in questi diversi casi essa può suddividersi in più parti vibranti all'unisono, e presentare in conseguenza diversi nodi di vibrazione.

Le vibrazioni longitudinali delle verghe, come quelle delle corde, danno suoni molto acuti; quindi perchè la verga suddivisa in parti vibranti all'unisono dia suoni valutabili, è necessario che abbia sufficiente lunghezza. Se la verga da sperimentare è un cilindro o tubo di vetro, allora tenendola con mano ferma pel suo mezzo e strofinandone una delle metà un pannolino bagnato, si avrà un suono prodotto da vibrazione longitudinale: se poi la verga sia di metallo, di legno, ec. sarà più fa-

cile eccitarla a vibrazioni longitudinali collo strofinio di un pezzo di panno impolverato di resina; ovvero fermando un tubo di vetro ad una delle basi, e strofinando il tubo con pannolino bagnato, la vibrazione verrà comunicata dal tubo alla verga.

L'esperienza ha dimostrato che il suono in tal modo ottenuto non ha veruna relazione col diametro della verga, ma dipende soltanto dalla natura della verga e dalla sua lunghezza; e se facciamo eguale a 1 il suono più grave che se ne può trarre, gli altri prodotti dalla suddivisione della verga in parti vibranti all'unisono saranno rappresentati dalla serie 2, 3, 4 ec. e che sono tanto più difficili ad ottenersi, per quanto è minore la lunghezza della verga; un cilindro di vetro lungo 2 metri difficilmente produce il suono 4.

Allorchè un solido è vibrante, non tutte le sue molecole oscillano egualmente intorno alle loro posizioni di equilibrio: ve ne ha di quelle che eseguono ampie oscillazioni, mentre talune sono pressocchè in riposo. Le serie di queste ultime costituiscono le *linee nodali* del solido vibrante, e che si possono rendere visibili spargendo sopra una delle sue facce un poco di sabbia fina e secca: nell'atto della vibrazione i granelli urtati dai punti vibranti della superficie si accumuleranno sulle linee nodali. Questo metodo di esplorazione è stato ideato da Galileo.

Se le vibrazioni longitudinali vengono eccitate in un cilindro di vetro, il corso delle linee nodali potrà esser definito nel seguente modo. Tenendo fermo il cilindro pel suo mezzo, si adatti ad una delle metà un anello di carta (*fig.* 189) di un diametro più grande di quello del cilindro: strofinando l'altra metà, si vedrà l'anello correre sulla superficie del cilindro fino ad un certo punto, ed ivi fermarsi; quel punto apparterrà alla linea nodale. Girando successivamente il cilindro intorno al suo asse di alquanti gradi, e segnando ad ogni volta il punto di riposo dell'anello, si avrà nella serie dei punti un elica a larghe spire che rappresenterà l'andamento della linea nodale sopra una metà del cilindro. Ripetendo la stessa sperienza sull'altra metà, si avrà una seconda elica, la quale partendo dal mezzo del cilindro non

muove dalla stessa origine della prima , e sovente dirigge le sue spire in senso opposto. E se in vece del suono più grave il cilindro dia uno degli armonici che risultano dalla sua divisione in più parti vibranti all'unisono, allora si vedrà l' elica invertire l'andamento delle spire ad ogni nodo di vibrazione. Se il cilindro fosse vôto nell'interno, per mezzo di un grosso granello di sabbia o di un globetto di avorio, si potrebbe determinare la linea nodale sulla faccia interna. E se in fine la verga sottoposta all'esperimento è di forma prismatica, si troverà che le linee nodali di una faccia corrispondono ai ventri di vibrazione della sua opposta. Savart, cui si debbono tutti questi risultamenti, fa dipendere la cagione di questa singolare disposizione delle linee nodali sulle opposte facce di una verga da un movimento di contorsione che accompagna l'alterno moto di condensamento e rarefazione, donde risulta la vibrazione longitudinale.

Qualunque però sia il movimento di vibrazione, longitudinale o trasversale, è d'uopo osservare che esso deve avere opposte direzioni nei due lati della sezione nodale, quando il corpo si divide in più parti vibranti all'unisono. Così nelle vibrazioni trasversali della corda *ad* (*fig.* 187) se *b* diviene un nodo di vibrazione, sarà nel tempo stesso un punto d'inflessione delle due opposte curvature *abc*, *bcd*. Similmente se la verga *mn* (*fig.* 190) presenta in *a*, *c*, *b* altrettanti nodi di vibrazione, si avrà che mentre i movimenti di condensazione convengono per opposte direzioni verso i nodi *a* e *b*, due movimenti contrarî di rarefazione partono dal nodo *c*. Senza questa simultaneità di opposti movimenti le sezioni *a*, *b*, *c* non potrebbero essere luoghi di nodi, poichè spinte in un senso dall'impulso molecolare senza esser retrospinte dall'altro, concepirebbero un movimento di traslazione inconciliabile colla funzione di nodo.

160. Il *diapason* (*fig.*191) che determina il *la* degli strumenti musicali, ci offre un esempio di verghe curve vibranti. Si compone di due braccia curvilinee elastiche, congiunte ad un piede che deve sostenerlo sulla cassa destinata a rinforzarne il suono. Il quale potendo variare secondo l'intensità della forza che ne

mette in vibrazione le braccia allontanandole dalla loro posizione di equilibrio, val meglio metterlo in azione per mezzo del cilindro *k*, che introdotto per la parte più ampia dell'istrumento, vien tratto fuori per lo spazio che separa le due punte: così le due braccia vengono allontanate sempre della stessa quantità, e producono in conseguenza un suono costante.

161. Le lamine fatte di diverse sostanze, metallo, legno, vetro, terra cotta ec. e di qualunque figura, triangolari, quadrate, poligonali, circolari, elittiche ec. possono concepire un moto di vibrazione, strofinandone l'orlo con un arco di violino, dopo averle fermate in uno o più punti. Da ognuna di esse si possono trarre molti suoni diversi, a ciascuno dei quali corrisponderà una varia disposizione di linee nodali, rese sensibili dal movimento dei granelli di sabbia sparsa sulla lamina prima di eccitarla a vibrazione. I granelli si vedranno saltellare e comporsi finalmente secondo talune linee che rappresenteranno i punti della superficie che sono in riposo mentre gli altri oscillano; e queste linee nodali si vedranno aumentare di numero a misura che la lamina renderà suoni più acuti.

Il grado del suono prodotto, e quindi la forma e disposizione delle linee nodali dipendono dalla figura della lamina, dalla posizione e dal numero dei punti che vengono fermati, dalla direzione e rapidità dell'arco che l'eccita a movimento di vibrazione. Le lamine quadrate, se hanno un'elasticità uniforme ed i punti fissi sono convenientemente disposti, producono sistemi più o meno simmetrici di linee nodali, risolubili in linee diagonali, o in linee che dividono in parti eguali i lati opposti della figura. Le lamine circolari possono produrre linee nodali dirette secondo i diametri, e che dividono la superficie del cerchio in settori eguali, tanto più numerosi, per quanto il suono è più acuto. Questi settori sono sempre in numero pari, che in contrario il movimento molecolare non potrebbe avere opposte direzioni in due settori contigui, e perciò la linea che li separa non potrebbe essere il luogo di un nodo. Se la lamina circolare sia fermata in due punti presi sopra un diametro, e si

metta in vibrazione stroflnandola in un foro fatto al centro con una cordicina di crini impolverata di resina, si avranno linee nodali circolari che aumenteranno di numero col grado del suono. Non di rado queste coesistono con un sistema di linee nodali diametrali, e talvolta se ne producono alcune che rassomigliano a rami d'iperbole.

Le linee nodali delle lamine circolari sono talvolta animate da movimento di oscillazione, e talvolta da un moto di rotazione continua. Savart, cui è dovuta la conoscenza di questo fenomeno, l'ha ottenuto nel seguente modo. Un disco di ottone perfettamente lavorato, di circa 4 decimetri di diametro e doppio 2 a 3 millimetri, era fermato orizzontalmente nel suo centro; e la sua faccia superiore era sparsa di polvere di licopodio, preferibile alla sabbia per la sua leggerezza. Con un'arcata continua traendo dal disco un suono grave e pieno, le linee diametrali che vi si formano, cominciano dal presentare un moto di oscillazione che gradatamente rinforzandosi finisce col trasformarsi in una rotazione continua: allora la polvere di licopodio trasportata da un rapido movimento vorticoso si vedrà descrivere una circonferenza paralella all'orlo del disco.

Alla classe delle lamine vibranti appartengono le campane ed altri strumenti sonori consimili, che al pari delle prime si dividono in più parti vibranti all'unisono. Eccitando a vibrazione uno di questi strumeuti già pieno di acqua, si vedranno le linee nodali disegnate sulla superficie del liquido, e coll'occhio si possono seguire le loro oscillazioni da un lato all'altro di una certa posizione media. Le quali oscillazioni sono forse la causa di quella intermittenza che si osserva nei tocchi di una campana uditi ad una certa distanza, tutti diretti verso l'osservatore ed attraverso di un'aria calma; giacchè il suono dovrà necessariamente riuscire più intenso, quando nelle sue oscillazioui la linea nodale si avanza nella stessa direzione del tocco.

Le membrane possono vibrare egualmente che le lamine, ma è necessario che abbiano quel grado di tensione che può sostituire la rigidezza della lamina. Per ottenere questa tensione Sa-

vart usava incollare l'orlo della membrana sopra un telaio di legno o sulla circonferenza di una campana di vetro, e ne variava il grado col renderla più o meno umida. Se alla membrana così preparata si avvicini un campanello tintinnante od una canna di organo che dia un suono sostenuto, i granelli di sabbia, di cui ne sarà già sparsa la superficie, si vedranno saltellare e riunirsi finalmente lungo le linee nodali che resteranno in tal modo disegnate.

162. I fluidi, siano liquidi siano aeriformi, possono concepire movimento di vibrazione al pari dei solidi. Ponendo in un alto recipiente la sirena di Cagnard Latour, e facendovi pervenire una corrente di acqua pel tubo annesso al fondo della cassa, le successive compressioni, patite dal liquido nel passare ai fori del disco mobile, lo metteranno in vibrazione, e si produrrà un suono che acquista dolcezza a misura che l'acqua si eleva sulla sirena. Negli strumenti a fiato è l'aria contenuta quella che costituisce il corpo sonoro, poichè l'esperienza dimostra che la materia del tubo tra certi limiti di doppiezza non ha veruna influenza sul grado del suono, ma può soltanto cangiarne il *metallo*. Se le pareti del tubo sonoro fossero abbastanza sottili, l'aria che vi è racchiusa potrebbe comunicarle il suo movimento di vibrazione; e secondo che la materia del tubo è disposta a vibrare più o meno celeramente della colonna di aria, questa potrà nel suo movimento essere accelerata o ritardata dalla reazione del tubo, e produrre in conseguenza un suono o più acuto o più grave di quello che avrebbe prodotto vibrando sola. Costruendo dei tubi di un piede di lunghezza con fogli di carta successivamente incollati da 2 a 12, si potrà ottenere una serie di suoni estesa da *sol*, a *si*$_3$, e bagnando le pareti del tubo, il suono può discendere più basso dell'ottava.

Per eccitare a vibrazioni una colonna di aria è d'uopo produrre una rapida serie di addensamenti e rarefazioni in qualche punto della sua massa; la qual cosa può menarsi ad effetto in diversi modi — 1° Dirigendo una corrente di aria sull'orlo tagliente di una parete del tubo; in questo modo si fa suonare

il flauto, si produce un fischio sul foro di una chiave ec. — 2° Spingendo l' aria in un condotto, una delle cui pareti ch' è libera, e che dicesi *linguetta*, urtata dalla corrente di aria prende un celere movimento di oscillazione e lo comunica alla colonna fluida contenuta nel tubo sonoro. In questo modo suonano il clarino, la ciannamella, ec.; nel corno da caccia, nella trombetta ecc. la linguetta è sostituita dalle labbra del suonatore. — 3° Producendo coi rapidi cangiamenti nel diametro di un condotto alterne espansioni e compressioni della corrente di aria che lo percorre: è così che il cacciatore può imitare il canto di taluni uccelli coi suoni che trae dal *richiamo*. Il quale è un piccolo cilindro (*fig.* 192) le cui basi sono forate nei loro centri: il cacciatore lo pone tra i denti e le labbra, ed ispirando l'aria con forza più o meno grande, ne ottiene suoni più o meno acuti. Or nell'atto dell'ispirazione si forma un vôto nell'interno del richiamo; l'aria esterna accorre a ripianarlo; ed entrando pel primo foro colla densità dovuta alla pressione atmosferica, soffre poi un'espansione nell'interno del richiamo, e quindi una compressione nel passare pel secondo foro. Queste successive fasi di densità che avvengono nella corrente di aria ispirata attraverso il richiamo, ne producono la vibrazione ed in conseguenza il suono. È questa presso a poco la spiegazione datane da Savart, il quale considerando l'anologia che la forma della glottide ha con quella del richiamo, ha giustamente opinato che da un meccanismo consimile debba esser prodotta la voce umana.

Una serie di successivi addensamenti e rarefazioni può esser ancora prodotta da rapidi ed alterni cangiamenti fisici che avvengono in un punto di una massa fluida definita. Si adatti un tubo sottile e terminato a punta ad un recipiente che per effetto di reazione chimica svolge una corrente di gàs idrogeno: si accenda il getto che si produce all'estremità del tubo, e si circondi la fiamma con altro tubo lungo e largo a sufficienza; si udirà bentosto un suono continuo e molto intenso. Il vapore dell'acqua prodotta della combustione dell'idrogeno, si condensa a pic-

cola distanza dalla fiamma: ivi succede un vòto, che l'aria esterna accorre a riempire, ed il suono si produce.

163. Premesse queste nozioni sui diversi modi di eccitare a vibrazione una massa definita di fluido elastico, passiamo a rendere ragione dei fenomeni dei tubi sonori. Rappresenti AB (*fig.* 193.) un tubo chiuso in B ed aperto in A; e supponiamo che nella falda di aria *cd* situata nell'orifizio del tubo si producano rapide e continue oscillazioni. Quando questa falda compirà l'oscillazione da A verso B, la massa di aria contenuta nel tubo sarà successivamente compressa, e sarà viceversa dilatata nel processo dell'oscillazione opposta. Or l'immobilità del fondo B, e l'attitudine della falda *cd* ad un facile movimento di traslazione richieggono che pei diversi suoni che potrà rendere la colonna fluida, le sue divisioni in parti vibranti all'unisono dovranno avere tali lunghezze che in B vi dovrà essere sempre un nodo di vibrazione, ed un ventre nella falda *cd*. Senza questa condizione non potrebbe avvenire nella colonna di aria una costante ripetizione degli stessi movimenti, e quindi risultarne un suono suscettibile di valore musicale.

Poniamo dapprima che la falda *cd* oscilli con tale celerità da far pervenire il successivo condensamento sul fondo B, quando essa è giunta alla metà della sua escursione da A verso B. Questa parte di onda compressa riflettendosi sul fondo del tubo, aggiungerà la sua azione alla compressione diretta che tuttavia procede da A verso B, e perverrà alla falda *cd* nell'istante in cui termina la prima oscillazione. Allora comincerà l'oscillazione opposta della falda vibrante *cd*, e nella sua durata il movimento di rarefazione percorrerà due volte la lunghezza del tubo, la prima con semplice moto diretto, e la seconda colla somma del moto diretto e del riflesso. Durante la 3ª e 4ª oscillazione le stesse fasi di densità e nel medesimo ordine si ripeteranno nella colonna di aria AB, la quale diverrà alternamente ora un'onda condensata, ed ora un'onda rarefatta: ciascuna di queste onde avrà una lunghezza doppia di quella della colonna di aria vibrante, e corrisponderà al suono più grave che si potrà trarre dal tubo.

Poniamo in secondo luogo che dopo una semioscillazione della falda *cd* il moto di compressione sia pervenuto in *zv*, al terzo della lunghezza del tubo; e quindi in *st*, ossia a due terzi della stessa lunghezza, quando la 1ª oscillazione sarà compiuta. Allora principiando la 2ª oscillazione, comincia il moto di rarefazione in *cd*, il quale perverrà alla falda *zv* nel medesimo tempo in cui il primo moto di compressione toccherà lo strato *lk* situato sul fondo del tubo. Di là riflesso questo moto di addensamento perverrà in *st* nel medesimo istante, in cui per opposta direzione vi giunge il moto di rarefazione da *zv*: la falda *st* sarà dunque animata ad un movimento di traslazione per l'azione congiunta delle due opposte fasi di densità che ad essa sopravvengono; *st* sarà dunque il luogo di un ventre di vibrazione. Ma quando la rarefazione è giunta in *st*, è compiuta la 2ª oscillazione della falda *cd*, e comincia la 3ª oscillazione, generatrice di un'altra onda condensata, la quale tocca lo strato *zv* nel medesimo tempo che per opposta direzione vi giunge la 1ª onda condensata riflessa dal fondo B; *zv* dunque resterà immobile sotto l'azione di due forze opposte ed eguali, e sarà in conseguenza un nodo di vibrazione. Da questo istante non vi sarà che una successione continuata dei movimenti che abbiamo discusso, e pei quali si avranno contemporaneamente in *zv* ed *lk* due nodi di vibrazione, e due ventri in *cd* ed *st*.

Similmente si dimostrerà che la condizione fondamentale di un nodo nel fondo del tubo e di un ventre nell'orifizio sarà soddisfatta, se poniamo che il moto di compressione arrivi al fondo del tubo dopo 2 vibrazioni e mezzo, dopo $3+\frac{1}{2}$; ed in generale dopo $n+\frac{1}{2}$ vibrazioni. Or il grado del suono è proporzionale al numero di vibrazioni fatte in un dato tempo dal corpo sonoro: quindi un tubo chiuso in un estremo non potrà produrre che uno dei suoni della

serie	$\frac{1}{2}$,	$1+\frac{1}{2}$;	$2+\frac{1}{2}$,	$3+\frac{1}{2}$,	....
ossia	1,	3,	5,	7,	....

E poichè il suono più grave che un tubo può rendere, corrisponde ad un' onda condensata o rarefatta di una lunghezza doppia di quella del tubo; ne segue che il valore assoluto di ciascun suono che si può ottenere da un dato tubo, non dipende che dalla sua lunghezza. Quindi le vibrazioni longitudinali delle masse fluide sono sottoposte alle stesse leggi delle analoghe vibrazioni delle verghe elastiche, per le quali abbiamo trovato (nº 159) che il diametro della verga non prende veruna parte nel valore del suono prodotto.

Supponiamo ora un tubo AB (*fig.* 194) aperto nei due estremi, e che la falda di aria che giace all'orifizio A venga scossa in modo da compiere un'intera oscillazione mentre la compressione giunge all'altro estremo del tubo. La falda *de* che in esso si trova, comunica la sua forza all'aria ambiente nella quale si disperde; e per la reazione delle forze molecolari ripulsive vinte nella durata della compressione, comincia in B un moto di rarefazione che si avanza nel tubo, mentre nello stesso tempo n'è cominciato un altro opposto in A per effetto della 2ª oscillazione della falda vibrante. Questi due movimenti perverranno nello stesso tempo allo strato *mn* che resterà immobile sotto le due aspirazioni eguali per cui vien tratto in contrarie parti. La stessa reazione molecolare che ha dato origine alla rarefazione in B, mentre un egual movimento veniva prodotto in A dalla seconda oscillazione della falda vibrante, produrrà viceversa nello stesso luogo B un moto di compressione contemporaneo a quello che in opposto senso viene generato dalla 3ª oscillazione della falda *ac*; e questi due contrari moti di compressione giungeranno ancora nello stesso tempo alla falda media *mn*, che spinta in contrario senso e da forze eguali, resterà in equilibrio. Essa è dunque un nodo di vibrazione, *ac* e *de* saranno due ventri. Ed il suono che il tubo renderà in tale ipotesi sarà il più grave possibile, poichè negli orifizi A e B debbono necessariamente aver luogo due ventri di vibrazione, che danno la massima onda di una lunghezza eguale a quella del tubo.

Poniamo in secondo luogo che il moto di compressione per-

venga alla metà *cd* del tubo (*fig.* 195) dopo la 1ª oscillazione della falda *ba*. Dopo la 2ª oscillazione la prima metà *ad* della colonna di aria sarà occupata da un'onda dilatata, e la seconda metà *cf* da un'onda condensata. Allora il moto di compressione pervenuto in *ef* si disperde nell'aria ambiente, e la reazione molecolare genera nella stessa falda *ef* un movimento di rarefazione, che ivi principia quando la rarefazione prodotta dalla 2ª oscillazione di *ab* tocca la falda *cd*. Questi due opposti movimenti, che saranno giunti l'uno in *st* e l'altro in *zv* dopo $\frac{1}{4}$ della 3ª oscillazione di *ab*, si anderanno a confondere in $m'n'$ dopo la metà della stessa oscillazione. In tal modo la falda $m'n'$, distante da *ef* di $\frac{1}{4}$ della lunghezza del tubo, diverrà un nodo di vibrazione. Un secondo nodo verrà nello stesso tempo a formarsi nella falda *mn* similmente situata rispetto ad *ab*, poichè quando la rarefazione è giunta in $m'n'$, vale a dire dopo la metà della 3ª oscillazione di *ab*, la reazione molecolare farà cominciare nella falda *mn* una compressione diretta da destra a sinistra, nel medesimo istante in cui un'altra compressione, che procede viceversa da sinistra a destra, viene dalla falda *ab*; e che dopo la metà della 3ª oscillazione saranno confuse in *mn*. In tal modo la lunghezza della colonna di aria sarà divisa nelle parti $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ vibranti all'unisono, e l'onda condensata o rarefatta avrà una lunghezza metà di quella del tubo. Nello stesso modo potranno aver luogo 3, 4 ecc. nodi di vibrazione; e la serie dei suoni rappresentata da numeri inversamente proporzionali alle lunghezze delle rispettive onde sonore, sarà compresa nella formola generale $\frac{1}{2}+n+\frac{1}{2}$. Donde facendo $n=0, =1, =2$, ecc. si avrà la serie

$$1, 2, 3, 4, 5, 6....,$$

vale a dire un suono fondamentale 1, la sua ottava 2, l'ottava della quinta 3, la doppia ottava 4, la doppia ottava della sua terza 5, ec.

Dalle cose predette si rileva qual differenza di modificazioni dinamiche abbia luogo in una colonna di aria, secondochè essa conduce un suono generato da un altro corpo, ovvero concepisce in se medesima un movimento di vibrazione. Nel primo caso l'azione molecolare alternandosi con due opposte fasi di densità per ogni falda del fluido conduttore, comunica a ciascuna di esse indistintamente un moto di traslazione oscillatoria. Viceversa avviene nel secondo caso; si stabiliscono nellà colonna vibrante uno o più nodi, in cui divengono massime le fasi di densità e nulli i movimenti di traslazione; mentre in altre falde divenute ventri di vibrazione, questi secondi movimenti sono massimi e nulli i primi. Or alla produzione di questi nodi e ventri è indispensabile che mentre un movimento di compressione o rarefazione procede in un certo senso, un altro simile ne venga in opposta direzione; ed ecco dichiarata la funzione dei tubi sonori: essi invertono l'oscillazione delle molecole sia determinando la riflessione delle onde quando presentano un fondo chiuso, sia occasionando la reazione molecolare in uno degli orifizi, allorchè vi giunge il moto eccitato nell'altro estremo.

Questa teoria sui tubi sonori fu proposta da Daniele Bernoulli nel 1762. Egli nè verificò i risultamenti con tubi di diverse lunghezze, che or lasciava aperti nei due estremi, or in uno soltanto; ed affinchè le oscillazioni della falda di aria posta all' imboccatura del tubo non fossero state turbate dall' azione istessa che l'eccitava a movimento, egli produceva il suono soffiando ad una certa distanza dall'imboccatura. Nuove sperienze furono poi fatte da Biot insieme ad Hamel; ed i risultamenti ottenuti furono conformi alla teoria di Bernoulli. La quale tanto meglio risponde al fatto, quanto i tubi sono più lunghi; poichè nella stessa ragione decresce l' influenza di quelle quantità neglette dalla teoria, vale a dire l'agitazione delle prime falde di aria nell'imboccatura del tubo, ed il loro leggiero cangiamento di densità che la teoria bernulliana suppoheva nullo, ma che intanto ha il piccolo valore indispensabile per trasmettere il suono all'aria ambiente. Del resto queste modificazioni che l'esperienza

presentava come empiriche, sono state trovate dal Poisson conformi ad una teoria più generale da lui escogitata sulle vibrazioni dei fluidi aeriformi.

164. Un diapason eccitato a vibrazione, produrrà un suono più forte se viene poggiato sopra una cassa sonora; ed in generale le casse degli strumenti a corde non hanno altra funzione che quella di rinforzare il suono. Il moto di vibrazione si può dunque trasmettere da un corpo all'altro, sia per contatto immediato, sia per un mezzo ponderabile qualunque.

La direzione secondo la quale si trasfonde il movimento, non ha lieve influenza sulla quantità della vibrazione trasmessa. Fermando l'estremo di una verga orizzontale ad una cassa sonora, a quella di un gravicembalo per esempio, e sull'altro estremo poggiando verticalmente un diapason vibrante; si osserverà che la quantità di vibrazione comunicata, minima quando il piano del diapason è normale alla lunghezza della verga, andrà poi crescendo col girare di questo piano e diverrà massima quando esso sarà confuso colla lunghezza della verga. Analogo fenomeno si otterrà da un'arpa: se prossime alle sue corde vibranti avvene altre capaci di rendere suoni armonici ai primi, la comunicazione del moto potrà o pur no aver luogo, secondochè i due sistemi di corde sono paralleli o incrociati ad angolo retto.

La direzione del moto vibratorio non è alterata nel trasmettersi da un corpo all'altro. Per un foro scolpito nel mezzo di una lamina elastica si faccia passare una corda di tal diametro da entrarvi a stento; si tenda verticalmente la corda, cosicchè la lamina resterà orizzontalmente sospesa, e su questa si sparga un poco di polvere. Eccitando la corda a vibrazioni trasversali, si vedranno i granelli scorrere sulla lamina, e si vedranno invece saltellare se la corda venga eccitata a vibrazioni longitudinali; dunque le prime vibrazioni della corda sono passate tangenzialmente nella lamina, e le seconde si sono trasfuse normalmente, e quindi sempre nella direzione del movimento primitivo. Così nel violino le vibrazioni trasversali delle corde comunicano vibrazioni tangenziali al ponticello ed allo *spirito*, e vibrazioni normali

alle due basi della cassa sonora. Purtuttavia la forma del corpo, cui il moto si trasfonde può modificare questa legge di comunicazione. Supponiamo, per esempio, che nella direzione di un raggio si comunichi la vibrazione ad un corpo di forma annulare: tutte le parti dell'anello vibreranno similmente, ed in conseguenza per un sol punto la vibrazione comunicata sarà parallella alla primitiva.

È evidente che il moto di vibrazione non può essere comunicato da un corpo all'altro, senza produrre nel sistema sincronismo di vibrazioni e quindi unità di suono. Ma è noto (n°159) che sotto eguali condizioni le vibrazioni longitudinali di una verga sono più celeri delle trasversali; in conseguenza se le vibrazioni longitudinali di una verga eccitano le trasversali di un'altra, è necessario che da una parte diminuisca la celerità delle prime, dall'altra aumenti quella delle seconde, finchè tutte coincidano in un perfetto sincronismo. Savart, il cui nome è inseparabile dalla storia dei progressi dell'Acustica, ha osservato che in un sistema di verghe, per le quali l'oscillazione molecolare si trasmette dall'una all'altra, le linee nodali sono più allungate nelle vibrazioni longitudinali, e più ravvicinate nelle trasversali di quel che sarebbero state senza l'unità del sistema.

Da questa reciproca influenza delle vibrazioni comunicate risulta — 1° che il grado del suono prodotto nel sistema deve tanto più divergere da quello del corpo agente, per quanto più differiscono tra loro i suoni che nelle medesime circostanze i due corpi renderebbero isolatamente — 2° che la comunicazione sarà tanto più facile ed in conseguenza più forte il suono risultante, per quanto i suoni individuali meno differiscono tra loro; quindi una massima facilità ed energia nel caso dell'unisono, come dimostra un semplice ed ingegnoso apparecchio di Savart. È composto da due tubi di gran diametro (*fig.* 196) ch'entrano l'uno nell'altro come quelli di un cannocchiale, e da una campana *a*; e questi due pezzi dell'istrumento sono sostenuti da due colonnette mobili per una scanalatura fatta nella base dell'apparecchio. Eccitata nella campana una vibrazione continua col passar-

vi un arco di violino, e regolata la posizione e lunghezza del tubo in modo da cogliere precisamente l'unisono, si sentirà allora un suono spiccato e forte che desta la meraviglia dell'osservatore. Laonde non per ogni dimensione e forma i corpi sono egualmente atti a ricevere e trasmettere il movimento di vibrazione: con diligenti ricerche Savart ha determinato le forme e dimensioni di tutte le parti del violino, perchè le vibrazioni delle corde si comunicassero loro più facilmente; ed il violino così modificato ha dato suoni più dolci e più morbidi di quelli che si ottengono per l'ordinaria costruzione. Ed in queste ricerche sulle forme e dimensioni dei corpi che li rendono più atti alla comunicazione del moto vibratorio Savart ha trovato la ragione per la quale l'aria contenuta nella casse degli strumenti a corde risponde facilmente all'unisono di tutta la serie di vibrazioni che le corde possono concepire. Egli nello studiare l'influenza delle dimensioni dei tubi sulla comunicazione del suono all'aria che vi è contenuta, ha trovato che per una lunga serie di suoni la trasmissione è tanto più facile, quanto il diametro del tubo è più grande rispetto alla sua lunghezza: or le casse sonore colla loro forma larga e depressa rassomigliano a tubi di grande diametro e breve lunghezza.

Allorchè un corpo vibra in un mezzo qualunque, come aria, acqua, mercurio, ec. le oscillazioni molecolari debbono vincere la resistenza opposta dalla pressione del mezzo, e perdere perciò una parte della forza e quindi della celerità di vibrazione. Questa perdita non solo avrà una ragione colla densità del mezzo, ma eziandio coll'angolo che la direzione del moto vibratorio farà con quella della pressione, la quale sappiamo esser sempre normale alla superficie che la riceve. Savart fermò al centro di un disco di vetro e perpendicolarmente al suo piano un tubo della stessa sostanza: immerse il disco orizzontalmente nell'acqua, e l'eccitò a vibrazioni normali strofinando il tubo nel senso della lunghezza. Ebbe così un suono più grave di quello che il disco produceva nell'aria; e più che in questo fluido, le linee nodali si disegnavano lontane dal centro. Viceversa dalle

vibrazioni longitudinali di una verga ottenne lo stesso suono nell'aria, nell'acqua e nel mercurio.

Dalla comunicazione del moto vibratorio al mezzo ambiente risulta ancora la differenza osservata da Faraday tra le linee nodali ottenute nell'aria, e quelle prodotte nel vòto pneumatico; e perchè una tal differenza sia sensibile è d'uopo spargere la lamina di polvere sottile e leggiera, come quella di licopodio. Savart confermando colle sue ricerche i risultamenti ottenuti da Faraday, ne ha trovato ancora la cagione. Facendo vibrare sotto acqua una larga lamina ed in modo d'avere una linea nodale nel mezzo di essa, egli osservava a destra ed a sinistra della linea due vortici resi visibili dagli acini di polvere galleggianti nel liquido. Vortici analoghi si producono nell'aria, e per la loro azione perturbatrice, che manca nel vòto, i granelli della polvere sparsa sulla lamina vanno a fermarsi sopra punti che non sono realmente in riposo; e la vera forma della linea nodale ne viene così modificata. Questa spiegazione data dal Savart rende ancora ragione della necessità di usare una polvere leggiera per rendere sensibile la differenza delle linee nodali.

CAPO QUARTO.

Misura della celerità con cui il suono si trasmette per diversi corpi — Misura del calore specifico dei fluidi aeriformi a volume costante e pressione variabile.

165. Eccetto l'aria e l'acqua che si possono avere sotto dimensioni comparabili allo spazio che il suono percorre nella durata di 1″, per tutti gli altri corpi il valore di questa celerità non può esser data che da una misura indiretta. La formola $v = \sqrt{\frac{g}{a}}$ offre una di queste misure, quando sia data la quantità a di cui il corpo si allunga o si comprime sotto il peso di una colonna della medesima sostanza ed alta 1^m; un'altra se ne ha dai suoni che si possono trarre dai corpi solidi sotto forma di verghe, e dai

fluidi che siano chiusi in tubi sonori. Con questo secondo metodo Chladni ha determinato la celerità del suono in parecchi solidi. Egli dopo aver ridotto il corpo a forma di verga ed averla sospesa pel suo mezzo, l'eccitava a vibrazioni longitudinali che avessero dato il suono più grave possibile; ed in tal modo otteneva un suono, la cui onda eguagliava la lunghezza della verga (n° 163). Indi metteva in vibrazione la colonna di aria contenuta in un tubo lungo quanto la verga ed aperto nei due estremi; e traendone il suono più grave possibile, otteneva così un'onda eguale in lunghezza alla prima. Ed essendo eguali le lunghezze delle onde pei due suoni, le loro celerità dovevano essere proporzionali ai numeri di vibrazioni fatte nel medesimo tempo, e che si potevano facilmente dedurre dai valori musicali dei due suoni. In una delle sue sperienze Chladni prese una verga di argento lunga 2 piedi del Reno ed un tubo sonoro di egual lunghezza; ed ebbe re_6 dalla verga e do_3 dal tubo. Essendo $re_1 = \frac{9}{8}$, sarà $re_6 = \frac{9}{8} . 2^5 = 9.4$, e $do_3 = 4$: sarà dunque la celerità del suono nell'argento 9 volte più grande di quella che ha luogo nell'aria. E da analoghi sperimenti egli dedusse i numeri segnati nella tavola seguente, e che si riferiscono alla celerità nell'aria presa per unità.

Osso di balena	6 2/3	Legno di acajù	
Stagno	7 1/2	— di ebano	
Argento	9	— di carpino	
Legno di noce		— di olmo	. . . 14 1/3
— di tasso		— di ontano	
— di quercia	. . . . 10 2/3	— di betulla	
— di prugno		— di tiglio	
Rame giallo		— di ciriegio	
Tubi di pipe da tabacco	10 a 12	— di salcio	 16
Rame	12	— di pino	
Legno di pero		Vetro	
— di faggio rosso	. . . 12 a 12	Ferro o acciaio	. . . 16 2/3
— di acero		Legno di abete . .	16 2/3 a 18

166. La celerità del suono in un gas qualunque può calcolarsi per mezzo della formola $v = \sqrt{\frac{e}{d}}$ (n° 150) corretta dal fattore $\sqrt{\frac{c}{c'}}$, nel quale c rappresenta la capacità termica del gas a pressione costante e c' la sua capacità a volume costante. Or abbiamo veduto (n° 74) che chiamando t la quantità di gradi di cui si è innalzata la temperatura del gas, e t' i gradi di calore svolto dallo stesso gas se per un eccesso di pressione avesse conservato il volume primitivo; il rapporto delle due capacità sarà

$$\frac{c}{c'} = 1 + \frac{t'}{t}.$$

Il rapporto dunque delle due capacità termiche sarebbe noto, se per ogni gas si avesse il valore di t' in funzione di t. Rispetto all'aria questa funzione può dedursi da taluni sperimenti di Clément e Desormes. Al collo di un pallone di vetro capace di litri 28,4 essi adattarono un tubo orizzontale che nell'altro estremo comunicava con una macchina pneumatica; e da due punti presi sulla lunghezza di questo tubo orizzontale partivano due tubi verticali, uno dei quali pescava nel mercurio, l'altro nell'acqua. Dopo aver rarefatta l'aria nel pallone fino ad un certo segno, ed atteso il tempo necessario perchè l'aria residua raffreddata dalla rarefazione avesse preso la temperatura dell'aria ambiente, essi aprirono una chiave di cui era provveduto il tubo orizzontale, e la lasciarono aperta finchè l'acqua ed il mercurio aspirati dalla rarefazione nei tubi verticali fossero discesi fino al livello esterno per effetto dell'aria che da fuori si precipitava dentro il pallone. Lasciato così l'apparecchio per qualche tempo, i due liquidi si videro elevarsi di belnuovo nei tubi verticali, e toccare la massima altezza quando l'aria interna si era messa in equilibrio di temperatura coll'esterna. Or è facile comprendere la causa di questa seconda ascensione. L'aria contenuta nel pallone, compressa per l'impeto con cui l'aria ester-

na si è slanciata dentro, ha svolto una certa quantità di calore, la quale aumentando la tensione del fluido è concorsa coll'accrescimento di pressione che veniva di fuori, a far discendere i liquidi nei tubi verticali fino al livello esterno: dopochè poi questo calore fu dissipato, una parte della tensione interna n'è stata distrutta, ed i fluidi sono stati una seconda volta aspirati nei tubi verticali. In una delle sperienze fatte da Clément e Desormes, e che diede un risultamento eguale al medio delle altre, si ebbero i seguenti dati.

Temperatura ambiente	12,°5
Pressione atmosferica durante l'esperimento	766mm,5
Altezza dell'acqua nel tubo verticale per l'aspirazione operata nel pallone, e ridotta in altezza di mercurio	13mm,01
Altezza dell'acqua, dopo entrata l'aria esterna ed equilibrata la temperatura del pallone, ridotta ancora in altezza di mercurio	3mm,611

La quantità x di calore svolto per la pressione operata dall'aria esterna è stata dunque tanta da aumentare la pressione dell'aria interna nella ragione di 766,5 — 3,611 a 766,5 ossia nella ragione di 762, 882 a 766,5; in conseguenza la pressione è restata aumentata di $\frac{3,611}{762,889}$. Chiamando 1 il volume dell'aria residua nel pallone alla temperatura 0°; il suo volume a 12°,5 sarebbe stato $1 + 12,5\alpha$, α indicando il coefficiente di dilatazione, ed αx l'aumento di volume per x gradi. Or l'accrescimento della tensione ha dovuto avere alla tensione primitiva la stessa ragione che l'aumento di volume avrebbe avuto al volume primitivo; quindi per determinare x si ha la relazione

$$\frac{\alpha x}{1 + 12,5\alpha} = \frac{3,611}{762,889};$$

donde $x = 1°,35$ dopo aver sostituito ad α il suo valore 0,003667. Dunque l'aria ha svolto 1°,35 di calore, passando dalla pressione 752,69 a 762,889, vale a dire prendendo l'aumento di pres-

sione 10,199. Questo aumento è circa $\frac{1}{74}$ della pressione 752,69; perciò rappresentando quest'ultima pressione con $\frac{74}{74}$, essa sarà poi divenuta $\frac{75}{74}$. Essendo secondo la medesima ragione aumentata l'aria nel pallone, è facile comprendere che se il calore svolto non avesse dovuto proporzionatamente ripartirsi tra l'aria esistente nel pallone e quella sopravvenuta, l'aumento di temperatura sarebbe stato $1°35 \times \frac{74}{75} = 1°,37$. Or se l'aumento di $\frac{1}{74}$ nella tensione dell'aria esistente nel pallone ha prodotto lo svolgimento di 1°,37 di calore, quello di un solo grado avrebbe richiesto nelle medesime circostanze un aumento di pressione rappresentata da

$$\frac{1}{74.1,37} = \frac{1}{101,38}.$$

Analoghi sperimenti furono poi eseguiti da Gay-Lussac e Welther; ma in vece di determinare la quantità di calore svolto dalla compressione di una massa di aria già prima rarefatta, essi cercarono la quantità di calore assorbito per rarefazione da una massa di aria precedentemente condensata: ed i risultamenti cui essi pervennero non furono gran fatto differenti da quelli ottenuti da Clément e Desormes.

Or dagli esposti fatti si rileva che una parte della quantità di calore assorbita dall'aria per aumentare la sua temperatura di 1°, serve unicamente a dilatarla di 0,003667 del suo volume a 0°; e che questa parte, nell'ipotesi di un fluido calore agente per emissione, è eguale a quella che si svolgerebbe per una riduzione di 0,003667 di pressione. Sopra abbiamo veduto che l'aumento di $\frac{1}{101,38}$ sulla pressione aumenta la temperatura dell'aria di 1°; dunque l'aumento di temperatura x per l'accrescimento di 0,003667 nella pressione si avrà dalla proporzione

$$\frac{1}{101,38} : 0,003667 = 1 : x$$

donde $x = 0,3718$. E poichè negli sperimenti di Clément e Desormes una parte del calore svolto per la compressione era assorbito dalle pareti del recipiente, per farne la giusta correzione essi hanno istituito delle ricerche, dalle quali hanno rilevato che conveniva aumentare i risultamenti ottenuti di $\frac{1}{8}$ del loro valore. Recando questa correzione al valore di x, si ottiene $x = 0,4182$.

Rimontando ora al principio della quistione, vale a dire al valore numerico del rapporto $\frac{c}{c'}$ delle due capacità termiche, osserviamo ch'essendo 0,4182 la quantità di calore consumata per la dilatazione dell'aria nell'accrescimento di 1° di temperatura, la quantità assorbita per la dilatazione corrispondente a t gradi sarà $0,4182t$. Avendo chimato t' questa quantità nella formola che presenta il rapporto delle due capacità termiche, avremo $t' = 0,4182t$; quindi

$$\frac{c}{c'} = 1 + \frac{t'}{t} = 1 + \frac{0,4182t}{t} = 1,4182.$$

167. È facile comprendere le gravi difficoltà che questo metodo diretto avrebbe incontrato nella sua applicazione ai gas differenti dall'aria, sia seguendo la pratica di Clément e Desormes, sia quella di Gay-Lussac e Welther. Scovrendo una legge rimarchevole delle vibrazioni dei fluidi elastici Dulong ha potuto invertire lo stato della quistione; vale a dire che invece di ottenere per mezzo del rapporto $\frac{c}{c'}$ la correzione della formola newtoniana sulla celerità del suono, ha cercato viceversa il valore di $\frac{c}{c'}$ comparando la celerità reale alla teorica.

Biot aveva annunziato che facendo suonare uno stesso tubo con differenti gas, la posizione della superficie nodale variava dall'uno all'altro, trovandosi a diverse distanze dall'imboccatura del tubo: Dulong occupandosi della stessa quistione ha trovato pel

contrario che la posizione della linea nodale rimane invariabile. Egli eseguiva le sue ricerche per mezzo di un tubo di flauto situato in una grande cassa foderata dentro e fuori di piombo, ed abbastanza puntellata nell' interno per resistere alla pressione esterna dell'atmosfera, quando in essa si faceva il vôto. La cassa comunicava con un gassometro donde riceveva il gas già disseccato; e nel suo fondo superiore stavano scolpite tre aperture, una delle quali rimaneva chiusa da un disco di cristallo dietro cui stava un termometro destinato ad indicare la temperatura dell'interno della cassa; un'altra apertura immetteva in un largo tubo di vetro chiuso superiormente da un coverchio a vite; per la terza finalmente, senza permettere ingresso all'aria esterna, passava un'asta che serviva ad introdurre uno stantuffo nel tubo sonoro. Dopo aver fatto il vôto nella cassa, la si empiva del gas su cui si voleva sperimentare; indi si scovriva il tubo di vetro, e nuovo gas affluendo continuamente dal gassometro, ne conservava piena la cassa senza mescolanza di aria. Intanto la corrente del gas eccitava a vibrazione la colonna fluida contenuta nel tubo sonoro, il quale aperto nei due estremi produceva pel suono più grave un'onda sonora lunga quanto il tubo. Preso l'unisono di quel suono, s'introduceva lo stantuffo finchè fosse tornato lo stesso suono, e dalla quantità di cui era discesa l'asta si arguiva la posizione della linea nodale. Facendo la prima sperienza coll'aria, poi ripetendola con diversi gas, si avevano suoni fondamentali differenti con una superficie nodale di posizione invariabile; vale a dire che i diversi gas producevano nel tubo onde sonore di eguali lunghezze. Le celerità nella trasmissione del suono divenivano così direttamente proporzionali ai numeri di vibrazioni fatte nel medesimo tempo, e determinabili per mezzo di una sirena.

Prendendo a termine di comparazione il numero N di vibrazioni fatte dal suono prodotto dall'aria, e disegnando con k il rapporto $\frac{c}{c'}$ rispetto a questo fluido, e con k' la stessa quantità relativa al gas che aveva dato il numero N' di vibrazioni per

eguale lunghezza dell'onda sonora, si aveva k' dalla proporzione

$$N : N' = v : v' = \sqrt{(1 + \alpha t)k} : \sqrt{\frac{1 + \alpha t'}{d} k'},$$

t e t' disegnando le temperature interne della cassa nella durata delle due sperienze, e d la densità del gas rispetto all'aria.

Conosciuta così la velocità v' pel suono nel gas alla temperatura t' dell'esperimento, e determinata la correzione k' della velocità teoretica, era facile calcolare la velocità v del suono nello stesso gas alla temperatura 0°. La tavola seguente espone i valori di v e $\frac{c}{c'}$ determinati da Dulong

NOMI DEI GAS.	VELOCITA' teoretica a 0°.	VALORI DI V.	VALORI DI $\frac{c'}{c}$
Aria atmosferica .	279,29	333,00	1,421
Gas ossigeno . .	266,00	317,17	1,415
— idrogeno . .	1064,80	1269,50	1,407
— acido carbonico	226,24	261,60	1,339
— ossido di carbonio . . .	283,00	337,40	1,428
— ossido di azoto	226,00	261,90	1,343
— oliofaciente. .	281,99	314,00	1,240

NOTE.

(A)

Le due leggi fondamentali della discesa verticale dei gravi nel vòto vengono presentate dalla macchina di Atwood come due fatti indipendenti tra loro e senza veruna relazione alla legge della forza motrice. Questa individualità indipendente forma il carattere proprio di tutte le nozioni puramente empiriche, essendo sempre una veduta dello spirito la relazione che unisce i fatti in un sistema scientifico, e l'esperienza non potendo tutto al più che somministrare un'occasione al concepimento della teoria, ovvero un criterio di realtà alla teoria già concetta. E se il legame che può unire due o più fatti consiste in un rapporto di posizione o di quantità, la Geometria ed il calcolo divengono necessarî strumenti di ricerca; e soltanto pel loro mezzo possiamo pervenire allo scovrimento di una reale dipendenza.

In queste ricerche sulle relazioni matematiche dei fenomeni essendo per lo più ignota la legge che governa la forza motrice, si comincia dal formolarla con un concetto ipotetico, che sarà poi dichiarato reale o immaginario dalla comparazione dei risultamenti matematici ai dati sperimentali. Così volendo determinare col calcolo la relazione dello spazio al tempo nella discesa verticale dei gravi, è d'uopo cominciare dallo stabilire un rapporto tra la distanza del grave dalla superficie terrestre e l'intensità della forza che ve lo spinge. Dando a questo rapporto la forma più semplice, riguardiamo la gravità come una forza costante sopra una stessa verticale e per le piccole distanze dalla superficie terrestre, alle quali possono estendersi le nostre sperienze. E poichè tutto ciò ch'è continuo, è inaccessibile al calcolo se non si trasforma nel concetto di un tutto composto di elementi simili infinitamente piccoli, ri-

guarderemo l'azione della gravità come effetto di una serie d'impulsi successivi separati da istanti indivisibili, e ciascuno dei quali non duri che un infinitesimo di tempo. Laonde la velocità posseduta dal grave dopo la comunicazione di n impulsi, sarà n volte maggiore di quella prodotta da un solo di essi, e poichè n impulsi avranno consumato un tempo n volte più grande che uno di essi, così la velocità acquistata risulterà proporzionale al tempo. Quindi se chiameremo g la velocità acquistata in $1''$, e v quella che risulta da un'azione continuata per t secondi, avremo

$$v = gt.$$

Per lo stesso principio qui sopra esposto non possiamo calcolare lo spazio descritto con movimento vario, senza riguardarlo come la somma d'infiniti spazietti percorsi con altrettanti moti uniformi, ciascuno dei quali abbia durato un elemento dt del tempo. Or nel moto uniforme lo spazio è rappresentato dal prodotto della velocità pel tempo; e durante un infinitesimo di tempo non potendosi descrivere che un elemento ds dello spazio s, avremo

$$ds = vdt.$$

Non essendo le due variabili v e t indipendenti tra loro, perchè ligate dalla relazione $v = gt$; sostituiremo nel 2° membro dell'equazione precedente a v il suo valore gt, ed essa diverrà

$$ds = gtdt,$$

donde $$s = \int gt\,dt = \tfrac{1}{2}gt^2 + C.$$

Se all'origine del moto il grave non possedeva alcuna velocità impressa, t ed s saranno contemporaneamente nulle, e daranno in conseguenza $C = 0$. E la relazione dello spazio al tempo nella discesa libera dei gravi nel vôto sarà data dall'equazione

$$s = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

La quale ci dichiara gli spazî proporzionali ai quadrati dei tempi, e gli spazî percorsi nei tempi successivi proporzionali alla serie dei numeri dispari 1, 3, 5, 7, ec.

Se durante un tempo t il grave avesse camminato colla velocità v che aveva al terminare di quel tempo, avrebbe percorso lo spazio vt; intanto sotto l'azione acceleratrice della gravità ha

realmente percorso lo spazio $\frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}vt$, sostituendo v a gt. — Dunque se ad un punto qualunque della discesa verticale cessasse la forza di gravità, per la velocità acquistata ed in un tempo eguale al primo il grave percorrerebbe uno spazio doppio del già percorso.

Supponiamo da ultimo che un grave venga da una forza d'impulso spinto verticalmente dal basso in alto. Il suo movimento sarà ritardato, essendo la velocità impressa continuamente diminuita dall'azione opposta della gravità; e la diminuzione dopo un tempo t dall'origine del moto sarà eguale alla velocità gt prodotta dalla gravità nel medesimo tempo t. Quindi chiamando w la velocità variabile del grave ascendente, a la velocità iniziale, avremo

$$w = a - gt,$$

la quale ci dà $w = 0$, quando $gt = a$, ossia $t = \frac{a}{g}$. Donde possiamo determinare il tempo t della salita, essendo data la velocità iniziale a; e viceversa determinare quest'ultima quando sia data la durata del moto ascendente.

Or chiamiamo s' lo spazio che un grave percorre cadendo pel tempo t, ed s'' quello che descriverebbe nel medesimo tempo per l'azione di una spinta verticale. Pervenendo il grave al termine della sua discesa colla velocità $v = gt$, sostituiamo il valore di t tolto da questa equazione in $s = \frac{1}{2}gt^2$ ed avremo

$$s' = \frac{v^2}{2g}.$$

Prendiamo ancora il valore di t dall'equazione $w = a - gt$ nell'ipotesi di $w = o$ che fissa il termine della salita verticale, e poniamolo nella stessa equazione che assegna il valore dello spazio ed otterremo

$$s'' = \frac{a^2}{2g}.$$

Ma non può essere $w = 0$ senza che sia $a = gt$, ossia $a = v$; donde $s' = s''$. — Dunque se la celerità del grave venisse distrutta in un punto della sua discesa, ed allora gli fosse comunicata una velocità eguale ed opposta, il grave in un tempo eguale al primo ascenderebbe all'altezza dond'è caduto: vale a dire che un

grave per giungere nel suo moto di ascensione ad una data altezza, deve avere all'origine del moto una velocità iniziale eguale a quella che avrebbe acquistata cadendo dalla medesima altezza.

Tutti questi risultamenti algoritmici saranno *reali*, se g è *realmente* costante nelle piccole distanze dalla superficie della terra. Ed ecco la necessità dell'esperienza per confermare o distruggere le deduzioni del calcolo. Or la macchina di Atwood ci ha dimostrato le stesse leggi che il calcolo; è dunque g realmente costante nelle piccole distanze dalla superficie terrestre.

Quali sono dunque le funzioni della matematica e dell'esperienza nelle ricerche fisiche? — La prima partendo da una legge ipotetica, ne svolge tutte le conseguenze, e le presenta coordinate in un sistema scientifico; la seconda comparando le deduzioni del calcolo al fatto, rivela la realtà o l'insussistenza della legge adottata. Colla sola matematica la Fisica sarebbe priva di ogni criterio di realtà; colla sola sperienza non potrebbe mai dichiarare la connessione dei fenomeni, e perciò non potrebbe essere giammai una scienza.

(B)

Quando la legge di simmetria è funzione di una quantità variabile, e la figura presenta un sol asse di simmetria, il calcolo differenziale diviene un metodo naturale per la determinazione del centro di gravità. Ecco parecchi esempî di questo principio.

I.

Determinare il centro di gravità di una superficie piana simmetrica rispetto ad una retta, e terminata da una curva di cui sia data l'equazione.

Sia BAC (*fig.* 197) la curva, simmetrica rispetto alla retta Ax che scegliamo per asse delle ascisse: prendiamo ad origine l'intersezione A, e per asse delle ordinate la retta yy parallela al sistema di rette bisecate dall'asse di simmetria, e colle quali forma un angolo che chiamiamo α. L'elemento di superficie zs essendo diviso in due parti eguali dalla retta Ax, avrà il suo centro di gravità nel punto d'intersezione o, che fisserà eziandio l'ascissa co-

mune ai centri di gravità delle due metà oz ed os. Potendosi dire altrettanto di tutti gli altri elementi, è chiaro che l'ascissa del centro di gravità della superficie sAz sarà la stessa che quella della sua metà Aoz.

Ciò posto, le forze parallele P indicate nelle equazioni del n° 20 saranno designate da $y sen \alpha dx$, espressione della superficie di un elemento zo; la loro somma da $\int y sen \alpha dx$; i prodotti Px da $yx sen \alpha dx$, e la somma di questi prodotti da $\int yx sen \alpha dx$. Quindi chiamando X l'ascissa del centro di gravità, avremo mercè l'equazioni dello stesso n° 20 .

$$X = \frac{\int yx sen \alpha dx}{\int y sen \alpha dx} = \frac{\int yx dx}{\int y dx},$$

nella quale sostituendo ad y il suo valore tolto dall'equazione data della curva $y=fx$, avremo da operare sopra funzioni di una sola variabile, il cui integrale potremo sempre ottenere in termini finiti, o coll'approssimazione di una serie — Diamo le seguenti applicazioni della formola ottenuta.

1° *Determinare il centro di gravità di un trapezio* — Sia $abcd$ (*fig.* 198) il trapezio dato. Si dividano per metà le duo basi parallele ab e dc, e pei punti di divisione si conduca la mn, la quale sarà asse di simmetria e quindi delle x, perchè divide in due parti eguali qualunque retta condotta nel trapezio parallelamente alle basi ab e dc. Facciamo $ab=2p$, $cd=2q$; e condotta la ordinata $zo=y$ di un punto qualunque z della ad, o la ag parallela ad mn, avremo nel triangolo agd la proporzione

$$zs : dg = as : ag$$

ossia

$$y-p : q-p = x : a,$$

donde

$$y = p + \frac{q-p}{a} x,$$

facendo $mn=a$. Sostituito questo valore di y nell'equazione generale, avremo

$$X=\frac{\int\left(px+\frac{q-p}{a}x^2\right)dx}{\int\left(p+\frac{q-p}{a}x\right)dx}=\frac{\frac{1}{2}px^2+\frac{q-p}{3a}x^3}{px+\frac{q-p}{2a}x^2}=\frac{3pax+2(q-p)x^2}{6pa+3(q-p)x}$$

E definiti i due integrali tra i limiti $x=0$ ed $x=a$, otterremo finalmente

$$X=\frac{a}{3}\cdot\frac{p+2q}{p+q}.$$

2° *Determinare il centro di gravità di un segmento di cerchio* — Si divida per metà l'arco *abc* (*fig.* 199) che termina il segmento dato, e si congiunga il punto medio *b* col centro *o*. Il raggio *ob* sarà l'asse delle ascisse, e prenderemo *o* per origine. Così l'equazione del cerchio $y^2=a^2-x^2$ ci darà $xdx=-ydy$, che sostituito nell'equazione generale la trasforma in

$$X=\frac{\int -y^2dy}{Segmento}=\frac{-\frac{1}{3}y^3+C}{Segmento},$$

essendo l'area del segmento eguale a $\int ydx$. E chiamando c la corda ac, i valori di y si estenderanno da $-\frac{1}{2}c$ a $+\frac{1}{2}c$; e l'integrale definito da questi due limiti sarà

$$\left(\frac{1}{24}c^3+C\right)-\left(-\frac{1}{24}c^3+C\right)=\frac{1}{12}c^3;$$

quindi

$$X=\frac{\frac{1}{12}c^3}{segmento}$$

4° *Determinare il centro di gravità di un segmento* mAn (*fig.*200) *di cicloide, simmetrico rispetto alla retta* AD *perpendicolare sul mezzo della base* BC — Per rendere l'equazione generale applicabile a questo caso, osserviamo che le due funzioni componenti l'espressione frazionaria che determina X, integrate per parte ci danno

$$\int ydx=yx-\int xdy \qquad (a)$$

e . $$\int yxdx = \tfrac{1}{2}x^2y - \tfrac{1}{2}\int x^2dy \; ^{*} \qquad (b)$$

Or l'equazione della cicloide riferita al punto A come origine, e chiamando a il raggio del cerchio generatore, è

$$xdy = dx\sqrt{(2ax - x^2)},$$

donde $$\int xdy = \int dx\sqrt{(2ax - x^2)}.$$

Facendo $Az = x, mz = y$, $\int dx\sqrt{(2ax - x^2)}$ rappresenta l'area del mezzo segmento Azs del circolo generatore della cicloide, e chiamando λ quest'area, l'equazione (a) diviene

$$\int ydx = yx - \lambda,$$

ed il mezzo segmento mAz dell'area cicloidale sarà noto.

Rispetto poi all'equazione (b) osserviamo che essendo $xdy = dx\sqrt{(2ax - x^2)}$, sarà

$$x^2dy = xdx\sqrt{(2ax - x^2)},$$

ed $$\int x^2dy = \int xdx\sqrt{(2ax - x^2)}$$

Ma

$$\int xdx\sqrt{(2ax-x^2)} = \tfrac{1}{2}a\int dx\sqrt{(2ax-x^2)} - \int(\tfrac{1}{2}a-x)\sqrt{(2ax-x^2)}.dx$$

$$= \tfrac{1}{2}a\lambda - \frac{1}{3}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}} \; ^{**}.$$

* Differenziando la funzione x^2y si ha

$$d.x^2y = 2yxdx + x^2dy,$$

donde

$$yxdx = \tfrac{1}{2}d.x^2y - \tfrac{1}{2}x^2dy,$$

ed $$\int yxdx = \tfrac{1}{2}x^2y - \tfrac{1}{2}\int x^2dy$$

** Facendo $\sqrt{(2ax-x^2)} = z$, sarà

$$(a - 2x)\,dx = 2zdz,$$

ossia

$$(\tfrac{1}{2}a - x)dx = zdz;$$

quindi

$$\int(\tfrac{1}{2}a-x)\sqrt{(2ax-x^2}.dx) = \int z^2dz = \frac{1}{3}z^3 = \frac{1}{3}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Quindi sostituendo questo valore nell'equazione (b) avremo

$$\int yxdx = \tfrac{1}{2}x^2y - \tfrac{1}{4}a\lambda + \tfrac{1}{6}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Ottenuti così i valori di $\int yxdx$ e $\int ydx$, la loro sostituzione nell'equazione generale ci darà por l'ascissa del centro di gravità del segmento cicloidale simmetrico rispettò ad AD

$$X = \frac{\tfrac{1}{2}x^2y - \tfrac{1}{4}a\lambda + \tfrac{1}{6}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{yx-\lambda}.$$

Applicando questa formola all'area intera della cicloide, avremo $x=2a$, $y=\pi a$, $\lambda=\tfrac{1}{2}\pi a^2$;

quindi $$X = \frac{7}{6}a.$$

— 4° *Determinare il centro di gravità di un segmento parabolico simmetrico rispetto all'asse delle ascisse*—Dall'equazione $y^2=px$ della parabola si hanno

$$y=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}, \quad ydx=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx, \quad yxdx=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx;$$

quindi $$X = \frac{\int yxdx}{\int ydx} = \frac{\int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx}{\int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx} = \frac{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}x.$$

II.

Determinare il centro di gravità di una superficie di rivoluzione, di cui sia nota l'equazione della curva generatrice della superficie.

Sia AC (*fig.* 201) la curva generatrice della superficie, ed Ax l'asse di rivoluzione che prendiamo per asse delle ascisse. L'elemento $mn=ds$ della curva girando intorno all'asse Ax, genera un elemento di superficie cilindrica che avendo per raggio $mo=y$, sarà espressa da $2\pi yds$. Il centro di gravità di questa sottilissima zona essendo sull'asse, la sua ascissa sarà A$o=y$; quindi le forze P indicate nell'equazioni del n° 20 saranno espresse da $2\pi yds$,

ed i loro prodotti Px da $2\pi yxds$, perciò l'ascissa del centro di gravità della superficie di rivoluzione sarà

$$X=\frac{\int yxds}{\int yds}.$$

Applicando questa formola alla superficie sferica, avremo l'equazione della circonferenza generatrice riferita all'estremità A del diametro $y^2=2ax-x^2$; e togliendo dy da questa equazione, e sostituendone il valore nell'espressione $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, avremo

$$ds=\frac{adx}{y},\ yds=adx,\ yxds=axdx;$$

quindi

$$X=\frac{\int axdx}{\int adx}=\tfrac{1}{2}x.$$

Dunque il centro di gravità di una calotta sferica è alla metà della saetta.

Integrando la stessa equazione tra i limiti $Ao=x'$ e $At=x''$, si avrà pel centro di gravità della zona sferica determinata dai piani paralleli *mo* ed *st* l'ascissa

$$X=\frac{\tfrac{1}{2}(x'^2-x''^2)}{x'-x''}=\tfrac{1}{2}(x'+x'')$$

e prendendo ad origine il punto *t*, avremo la nuova ascissa

$$X'=\tfrac{1}{2}(x'+x'')-x''=\tfrac{1}{2}(x'-x''),$$

vale a dire che il centro di gravità di una zona sferica è nel mezzo della sua altezza, presa sul diametro perpendicolare ai piani delle basi.

III.

Determinare il centro di gravità di un solido simmetrico rispetto ad una retta.

Sia ABC (*fig.* 202) il solido, ed Ao l'asse di simmetria che prenderemo per asse delle x. Con due piani paralelli a BC e distanti tra loro di dx si determini la falda *mn*, la cui area sarà funzione di $BC=k$, di $Ao=a$ e di $Az=x$; dimodochè avremo l'area *mn* $=f(k,\ a,\ x)$. Ed essendo il volume della falda rappresentato da

$f(k, a, x)\, dx$, per le equazioni del n° 20 l'ascissa X del centro di gravità sarà definita dalla funzione

$$X = \frac{\int f(k,a,x) x dx}{\int f(k,a,x) dx}.$$

Applicando quest'espressione generale a determinare il centro di gravità di una piramide poligonale qualunque, di cui k esprima l'area della base, ed a la retta che unisce il vertice col centro di gravità della base, avremo l'area $mn = \frac{kx^2}{a^2}$; quindi

$$X = \frac{\int kx^3 dx}{\int kx^2 dx} = \frac{\frac{1}{4} x^4}{\frac{1}{3} x^3} = \frac{3}{4} x;$$

ed estendendo l'integrale da $x = 0$ ad $x = a$, si otterrà $X = \frac{3}{4} a$, risultamento già noto.

Mediante la stessa formola generale si possono determinare i centri di gravità dei solidi di rivoluzione. Indicando con $y = fx$ l'equazione della curva generatrice della superficie di rivoluzione, l'area mn della sezione normale all'asse sarà πy^2, e $\pi y^2 dx$ il volume della falda elementare; quindi

$$X = \frac{\int \pi y^2 x dx}{\int \pi y^2 dx}.$$

Supponiamo in primo luogo voler determinare il centro di gravità di un segmento sferico. Prendendo per asse delle x il diametro della sfera che passa pel centro della base del segmento, e per origine l'estremità dello stesso diametro, l'equazione della circonferenza generatrice della superficie sferica sarà $y^2 = 2ax - x^2$, a

indicando il raggio della sfera. Questo valore di y^2 sostituito nell'equazione generale pei solidi di rivoluzione, ci dà

$$X = \frac{\int (2ax^2 - x^3)dx}{(2ax - x^2)dx} = \frac{\frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4}{ax^2 - \frac{1}{3}x^3} = x\,\frac{8a - 3x}{12a - 4x}.$$

Quindi per l'emisfero avremo $X = \frac{5}{8}a$.

Prendiamo per secondo esempio il cono retto a base circolare. Essendo l'equazione della retta generatrice della superficie conica $y = \frac{b}{a}x$, b indicando il raggio della base ed a l'altezza, avremo $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$, ed in conseguenza

$$X = \frac{\int x^3 dx}{\int x^2 dx} = \frac{\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{3}x^3} = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}a,$$

estendendo l'integrale a tutto il cono.

(C)

Uno dei principî più fecondi che la filosofia naturale deve al sommo ingegno del Galileo, è senza dubbio quello delle *celerità virtuali*. Immaginiamo che un sistema di punti materiali a, b, c, (*fig.* 204) equilibrato sotto l'azione delle forze P, P′, P″, venga per poco rimosso dalla sua posizione di equilibrio, e che in conseguenza i punti a, b, c, ec. percorrano gli spazietti am, bn, co: questi spazietti rappresenteranno le celerità virtuali di quei punti, e proiettati sulle direzioni delle forze le loro proiezioni $az = p$, $bs = p'$, $ct = p''$, ec. saranno positive o negative, secondochè cadranno sulle direzioni delle forze, prese dai punti di applicazione, ovvero sui prolungamenti di esse. Or il principio scoverto da Galileo consiste nell'esistenza dell'equazione

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0.$$

Per dichiarare con un esempio l'esattezza di questo principio, im-

maginiamo due palle A e B (*fig.* 205) che congiunte da un filo che passa per la gola della girella C, poggino sui due piani inclinati *ab* e *ad*. Chiamando M la massa di A ed M′ quella di B, le componenti dei loro pesi secondo i piani inclinati saranno $M\frac{ae}{ab}$, ed $M'\frac{ae}{ad}$; quindi per esservi equilibrio dovrà aver luogo l' equazione

$$M\frac{ae}{ab}=M'\frac{ae}{ad},$$

$$\text{ossia}\quad M.ad=M'.ab,$$

$$\text{donde}\quad M:M'=ab:ad;$$

vale a dire che i pesi delle due palle dovranno essere direttamente proporzionali alle lunghezze dei piani inclinati. Or supponiamo sodisfatta questa condizione, e che alterato per poco l'equilibrio la palla A discenda in A′, e B salga in B′. La prima palla avrà così percorso lo spazio AA′, e la seconda lo spazio BB′ che supponiamo piccolissimi; e le proiezioni di questi spazî sulle direzioni delle forze, vale a dire su rette parallele alla verticale *ae*, saranno *ts* e *zv*, la prima positiva e la seconda negativa. In conseguenza pel principio delle celerità virtuali avremo

$$M.ts-M'.zv=0,$$

$$\text{ossia}\quad M.ts=M'.zv.$$

Ma $ts=AA'\frac{ae}{ab}$, e $zv=BB'\frac{ae}{ad}=AA'\frac{ae}{ad}$, dovendo per l'unione delle palle essere $AA'=BB'$; dunque sostituendo avremo

$$M.AA'\frac{ae}{ab}=M'.AA'\frac{ae}{ad},$$

$$\text{ossia}\quad M.ad=M'.ab,$$

$$\text{donde}\quad M:M'=ab:ad,$$

risultamento identico a quello disopra trovato circa la condizione di equilibrio delle due palle.

Premesse queste nozioni, siano *a*, *b*, ec. le molecole di un corpo che giace equilibrato sopra un piano orizzontale, e che per un leggiero allontanamento dalla sua posizione di equilibrio trasporti *a*, *b*, ec. in *a*′, *b*′, ec. Prendendo il piano di sostegno per quello delle *y x*, l'asse delle *z* sarà verticale; e nel piccolo movimento del corpo le z, z', z'', ec. delle molecole varieranno di dz, dz', dz'', ec. le quali alterazioni non potendo essere indipendenti per l'unità del sistema, dovremo supporre $dz'=fz.dz$, $dz''=\varphi z.dz$, ec. Or

chiamando m, m', m'', ec. le masse molecolari, l'ordinata Z del centro di gravità sarà data dall'equazione

$$Z = \frac{mz + m'z' + m''z'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots},$$

la quale per l'alterazione dell'equilibrio darà

$$dZ = \frac{mdz + m'fz.dz + m''\rho z.dz + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots}$$

Ma pel principio delle celerità virtuali

$$mdz + m'fz.dz + m''\rho z.dz + \ldots = 0;$$

e per una nota teorica del calcolo differenziale quest'ultima equazione è soddisfatta, quando Z è un *massimo* o un *minimo*; dunque perchè un corpo stia in equilibrio, sia sospeso o sostenuto, è d'uopo che il suo centro di gravità sia il più alto o il più basso possibile.

(D)

Sia $AB = r$ (*fig.* 203) la lunghezza del pendolo semplice, $CAB = \alpha$ l'angolo di semioscillazione ed $mAB = \beta$ l'angolo variabile che il pendolo forma colla verticale AB nello scendere per l'arco CB.

La velocità che il pendolo avrà in m, dopo aver descritto l'arco Cm, sarà la stessa che quella che avrebbe acquistata un grave scendendo per la verticale $sn = Bs - Bn = h - z$ chiamando h la freccia dell'arco di oscillazione e z la variabile Bn. Or se dinotiamo con θ ed x i senoversi degli angoli α e β, avremo

$$h = r\theta,\ z = rx,$$

quindi

$$h - z = r(\theta - x).$$

Sappiamo ancora che nella discesa verticale dei gravi (n° 26) si ha $v = \sqrt{2gs}$, v disegnando la velocità del grave al termine dello spazio s; quindi per la velocità v del pendolo nel punto m avremo

$$v = \sqrt{2g(h - z)} = \sqrt{2gr(\theta = x)}$$

Ma (n° 8) $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d.CAm}{dt} = \frac{d.r(\alpha - \beta)}{dt} = -\frac{rd\beta}{dt}$,

essendo l'arco $Cm = r(\alpha - \beta)$. Sostituendo si av: '

$$\frac{rd\beta}{dt} = -\sqrt{2gr(\theta - x)}$$

Or essendo $x = 1 - \cos\beta$, sarà $dx = \operatorname{sen}\beta d\beta$, e

$$d\beta = \frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2\beta}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+\cos\beta)(1-\cos\beta)}} = \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}.$$

In conseguenza

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{d\beta}{\sqrt{2(\theta - x)}} =$$

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(\theta x - x^2)}\sqrt{(1-\tfrac{1}{2}x)}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\,\frac{dx\,(1-\tfrac{1}{2}x)^{-\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{(\theta x - x^2)}}$$

Svolgendo $(1 - \tfrac{1}{2}x)^{-\tfrac{1}{2}}$ mercè la formola del binomio si ha

$$(1-\tfrac{1}{2}x)^{-\tfrac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^2}{2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{2^3} + \ldots\ldots$$

il cui termine generale $\dfrac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots.2n}\cdot\dfrac{x^n}{2^n}$.

E sostituita questa serie nel valore di dt, si ha

$$t = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\left[\int\frac{dx}{\sqrt{(\theta x - x^2)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(\theta x - x^2)}}\right.$$

$$\left. + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^2}\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{(\theta x - x^2)}} + \ldots \frac{1.3.5..2n-1}{1.4.6..2n}\cdot\frac{1^n}{2}\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(\theta x - x^2)}}\right]$$

Per isvolgere in serie

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(\theta x - x^2)}} = \int x^n dx\,(\theta x - x^2)^{-\tfrac{1}{2}},$$

osserviamo che ponendolo sotto la forma

$\int x^{m-1} dx X^p$ col fare $n = m-1$, $p = -\tfrac{1}{2}$ ed $X^p = ax^n + bx^{2n}$

che nel caso attuale diviene $\theta x - x^2$, abbiamo integrando per parte

$$\int x^{m-1} dx X^p = \frac{x^m}{m}X^p - \frac{p}{m}\int x^m X^{p-1}\,dX$$

$$= \frac{x^m}{m}X^p - \frac{apn}{m}\int x^{m+n-1}dx X^{p-1} - \frac{2bpn}{m}\int x^{m+2n-1}dx X^{p-1}.$$

D'altronde $X^{p-1}.\ X = X^{p-1}(ax^n + bx^{2n})$ ci dà

$$\int x^{m-1}dx X^p = ax\int x^{m+n-1}dx X^{p-1} + b\int x^{m+2n-1}dx X^{p-1}$$

Sostituendo questo valore di $\int x^{m-1}dxX^p$ nell'equazione precedente si otterrà

$$\int x^{m+2n-1}dxX^{p-1}=\frac{x^mX^p-a(m+pn)\int x^{m+n-1}dxX^{p-1}}{b(m+2pn)};$$

e finalmente ponendo m in luogo di $m+2n$ e $p+1$ in luogo di p, avremo

$$\int x^{m-1}dxX^p=\frac{x^{m-2n}X^{p+1}-a(m-n+pn)\int x^{m-n-1}dxX^p}{b(m+2pn)}.$$

Applicando questa formola generale al nostro integrale, abbbiamo $p=-\frac{1}{2}$, $m-1=n$, ed $n=1$ nel 2° membro; quindi

$$\int\frac{x^ndx}{\sqrt{(\theta x-x^2)}}=-\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{(\theta x-x^2)}+\frac{(n-1)\theta}{2n}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(\theta x-x^2)}}.$$

Perciò facendo $\int\frac{x^ndx}{\sqrt{(\theta x-x^2)}}=A_n$, ed $\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(\theta x-x^2)}}=A_{n-1}$,

avremo $$A_n=\frac{(2n-1)\theta}{2n}A_{n-1},$$

poichè sarà sempre $\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{(\theta x-x^2)}=0$, dovendosi estendere l'integrale da $x=\theta$ fino ad $x=0$, vale a dire dal punto C al punto B. Laonde sarà

$$A_1=\frac{1}{2}\theta A_0$$
$$A_2=\frac{3}{4}\theta A_1=\frac{1.3}{2.4}\theta^2A_0$$
$$A_3=\frac{5}{6}\theta A_2=\frac{1.3.5}{2.4.6}\theta^3A_0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n=\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\theta^nA_0.$$

Or A_0 da cui dipendono tutti i termini della serie, si ottiene dall'equazione

$$A_0=\int\frac{x^0dx}{\sqrt{\theta x-x^2}}=\text{arco}\left(\text{senver.}=\frac{2x}{\theta}\right),$$

il quale integrale esteso da B a C (il che muta il segno di dt), os-

sia da $x = 0$ ad $x = \theta$, diviene $= \pi$. Determinati così i valori di $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$, e raddoppiando il valore di t per avere la durata dall'intera oscillazione per l'arco CBD, avremo

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\theta}{2} + \left(\frac{1.3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2..46}\right)^2 \cdot \left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \ldots \right],$$

serie convergente qualunque sia θ, poichè il suo valore sarà sempre minore di 2, diametro del circolo trigonometrico. Ma se la freccia dell'arco di oscillazione sia piccolissima, avremo il valore di t con sufficiente approssimazione, arrestandoci al secondo termine della serie, nel quale sostituendo a θ il suo valore $\frac{h}{r}$, avremo

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left(1 + \frac{h}{8r}\right).$$

(E)

La lunghezza l nell'aria del pendolo semplice sincrono al pendolo osservato è data dall'equazione

$$l = L\left(1 + \frac{2R^2}{5L^2}\right) - Q,$$

facendo

$$Q = \frac{\frac{p}{6M}\left(L + b + R + \frac{2(bR - R^2 - b^2)}{L}\right) + \frac{m}{M}\left(D - \frac{D^2}{L}\right) + \frac{pR^2}{5ML^2}(L + b - R) + \frac{2mR^2}{5ML^2}(L-}{1 + \frac{p}{2M}\left(1 + \frac{b - R}{L}\right) + \frac{m}{M}\left(1 - \frac{D}{L}\right)}$$

Nella quale formola si suppone

$L =$ alla distanza dell'asse di sospensione dal centro della palla di platino.

$R =$ al raggio della palla di platino alla temperatura 0°.

$M =$ al peso della palla in grammi.

$b =$ alla distanza dell'asse di sospensione dall'origine del filo.

$D =$ alla distanza del centro di gravità della calotta dal centro della palla.

$m =$ al peso della calotta in grammi.

$p =$ al peso del filo in grammi.

(F)

Pei principî del Calcolo Differenziale è noto ch'essendo $y=fx$, $y'=f(x+h)$ ed $y''=f(x-h)$ saranno date dalle equazioni.

$$y'=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}+\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2.3}+\ldots\frac{d^ny}{dx^n}\cdot\frac{h^n}{2.3.4..n},$$

$$y''=y-\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}-\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2.3}+\ldots\frac{d^ny}{dx^n}\cdot\frac{h^n}{2.3.4..n}.$$

È noto ancora che in ciascuna di queste due serie si può dare ad h un valore sì piccolo da rendere un termine qualunque maggiore della somma algebrica di tutti gli altri. Dimodochè le due serie si possono scrivere sotto la forma

$$y'=y+m$$
$$y''=y-n,$$

facendo $m=\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}+\ldots$ ed $n=\frac{dy}{dx}h-\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}+\ldots$
In conseguenza y sarà minore di y' e maggiore di y'', e perciò y non potrà essere nè un *massimo* nè un *minimo*. Ma se poniamo $\frac{dy}{dx}=0$, allora le due serie diverranno

$$y'=y+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}+\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2.3}+\ldots$$

$$y''=y+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\ldots$$

ossia

$$y'=y+m,$$
$$y''=y+n,$$

ed y sarà un massimo od un minimo, secondochè $\frac{d^2y}{dx^2}$ sarà negativo o positivo. Quindi per un medesimo valore di h la differenza tra y' ed y che prima era

$$y' - y = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \ldots\ldots$$

nel caso di y massimo o minimo essa diviene

$$y' - y = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \ldots.$$

e quindi minore della prima, poichè h che si suppone sempre una piccola frazione, decresce rapidamente nelle sue potenze successive h^2, h^3, ec. Lo stesso si dirà di $y'' - y$; ed in conseguenza le variazioni delle grandezze nei valori prossimi al massimo od al minimo sono pressocchè nulle.

(G)

Supponiamo che l'altezza $mc = R$ (*fig*, 207) donde un grave discende, sia comparabile al raggio terrestre $oc = r$. Chiamando g la forza di gravità nel punto c situato sulla superficie della terra, per la legge della ragione inversa dei quadrati delle distanze l'intensità della stessa forza alla distanza $ao = x$ dal centro o sarà

$$g' = \frac{gr^2}{x^2} .$$

E chiamando v la velocità che un mobile acquista nel tempo t per l'azione di una forza acceleratrice qualunque, avremo

(n° 11 del testo) $$\frac{dv}{dt} = \frac{gr^2}{x^2} ;$$

daltronde abbiamo $$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R-x)}{dt} = -\frac{dx}{dt} ,$$

considerando v come la velocità acquistata dal grave nel discendere per la verticale $ma = R - x$.

Moltiplicando le due equazioni membro a membro, si ha

$$vdv = -\frac{gr^2dx}{x^2} ,$$

donde $$v^2 = -2gr^2 \int \frac{dx}{x^2} = \frac{2gr^2}{x} + C ;$$

e poichè $v = 0$, quando $x = R$, avremo $C = -\frac{gr^2}{R}$, e quindi

$$v^2 = 2\, gr^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right). \qquad (a)$$

Or se in questa equazione facciamo $x = r$, avremo che la velocità v che avrà il grave nel termine c della sua discesa sarà

$$v = \sqrt{2g(R-r)\frac{r}{R}};$$

e se l'altezza $s = R - r$, donde il grave è caduto, è una frazione trascurabile del raggio terrestre, avremo prossimamente $R = r$, e la velocità finale v sarà

$$v = \sqrt{2gs},$$

la stessa che abbiamo trovato (*nota* A) nell'ipotesi di g costante.

Per ottenere poi l'espressione del tempo t che il grave impiegherà nel percorrere la verticale $mc = R - r$, sostituiremo $-\frac{dx}{dt}$ (poichè x e t sono di segno contrario) a v nell'equazione (a), ed avremo

$$dt = -\frac{1}{r}\sqrt{\frac{R}{2g}}.x^{1/2}dx\,(R-x)^{-\frac{1}{2}},$$

donde $$t = -\frac{1}{r}\sqrt{\frac{R}{2g}}\int x^{1/2}dx\,(R-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Facendo $R - x = z^2$, sarà $x^{1/2} = \sqrt{(R - z^2)}$, $dx = -2zdz$, e $(R-x)^{-1/2} = z^{-1}$; quindi

$$\int x^{1/2}dx\,(R-x)^{-1/2} = -2\int dz\sqrt{(R-z^2)}.$$

Integrando per parte quest'ultima funzione, si ha

$$\int dz\sqrt{(R-z^2)} = z\sqrt{(R-z^2)} + \int\frac{z^2dz}{\sqrt{(R-z^2)}};$$

e da un'altra parte moltiplicando il 1° membro di quest'ultima equazione per $\frac{\sqrt{(R-z^2)}}{\sqrt{(R-z^2)}}$, si ottiene

$$\int dz\sqrt{(R-z^2)} = \int\frac{Rdz}{\sqrt{(R-z^2)}} - \int\frac{z^2dz}{\sqrt{(R-z^2)}} =$$

$$R.\,arco\left(\text{sen} = \frac{z}{\sqrt{R}}\right) - \int\frac{z^2dz}{\sqrt{(R-z^2)}}.$$

Or addizionando i due valori di $\int dz\sqrt{(R-z^2)}$, si ha

$$2\int dz\sqrt{(R-z^2)}=z\sqrt{(R-z^2)}+R.\,arco\left(\text{sen}=\frac{z}{\sqrt{R}}\right)+C,$$

e sostituendo questo integrale nel valore di t, si ottiene

$$t=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left(z\sqrt{(R-z)}+R.\,arco\left(\text{sen}=\frac{z}{\sqrt{R}}\right)\right), \quad (b)$$

non aggiungendo costante, perchè quando $R=x$, è $z=0$ e $t=0$.

Per avere il valore di t corrispondente a tutta la linea mc, bisognerà sostituire $R-r$ a z^2, e si avrà

$$t=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\sqrt{r(R-r)}+R.\text{arco}\left(\text{sen}=\frac{\sqrt{R-r}}{\sqrt{R}}\right)\right).$$

Ma se lo spazio $s=R-r$ percorso dal grave è una piccolissima frazione di r, il seno $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{R}}$ come piccolissimo potrà essere sostituito dall'arco corrispondente, ed il radicale in mezzo le parentesi diverrà $\sqrt{sr}+\sqrt{Rs}=\sqrt{2sr}$, essendo prossimamente $R=r$. Fatte queste sostituzioni avremo

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}, \text{ donde } s=\tfrac{1}{2}gt^2.$$

Così le leggi della discesa dei gravi nel vôto, dedotte dapprima dai risultamenti ottenuti colla macchina di Atwood, indi dichiarate (*nota* A) quali conseguenze necessarie di una gravità costante, si presentano finalmente nella loro deduzione dalla vera legge della gravità, sotto forma di limiti, ai quali la realtà dei fenomeni tanto più si approssima per quanto il punto di partenza del grave si trova più vicino alla superficie terrestre.

(II)

Sia mn (*fig.* 208) la superficie di livello, BAC la superficie immersa, simmetrica rispetto alla retta AD che presa per asse della x presenti le y orizzontali, come BD, rl, ec. L'elemento di superficie $srtv$ sarà espresso da $2ydx$; e chiamando z la distanza kl, e ϖ la densità del liquido, la pressione sostenuta dall' elemento di superficie sarà $2\varpi yzdx$. Sulla retta AD, asse di simmetria della figura BAC, dovrà stare il centro di pressione, ed il suo luogo sarà noto quando conosceremo la sua distanza x' dal punto A. Perciò servono le equazioni del n° 20, le quali ci danno

$$x'\int yzdx = \int yzxdx.$$

Or chiamando c la distanza Al, ed α l' angolo Alk, abbiamo kl ossia $z = \mathrm{A}h + ol = c + x\ cos.\alpha$; funzione che sostituita nell'equazione precedente, ci dà

$$x'\int(cydx + yxcos\alpha\, dx) = \int(cyxdx + yx^2cos\alpha\, dx).$$

Volendo applicare questa formola generale al triangolo, faremo la base BC $= 2b$, AD $= a$, e ad y sostituiremo $n\dfrac{b}{a}.x$, equazione della retta AB e nella quale n rappresenta il seno dell'angolo Alr. Così avremo

$$x' = \frac{c\int x^2dx + cos\alpha\int x^3dx}{c\int xdx + cos\alpha\int x^2dx},$$

nella quale estendendo gl'integrali da $x = 0$ fino ad $x = a$, otterremo

$$x' = a\,\frac{4c + 3acos\,\alpha}{6c + 4acos\,\alpha}.$$

Dal modo come è composta questa funzione che assegna il valore di x' si rileva — 1° Che facendo girare il triangolo intorno al

suo centro di gravità senz'alterare l'orizzontalità delle y, il valore della pressione resterà costante, ma la posizione del centro dipendendo da α e c, muterà sito sull'asse di simmetria — 2° Che per la dipendenza di x' da c, la posizione del centro di pressione sull'asse di simmetria varierà ancora, se il triangolo si elevi o discenda parallelamente a se stesso — 3° Che supponendo $\alpha=90°$, sarà $x'=\frac{2}{3}a$; vale a dire che se il piano del triangolo è orizzontale, il centro di pressione si confonde col centro di gravità — 4° Che facendo $c=0$, ossia trasportando il vertice del triangolo nella superficie di livelo, sarà $x'=\frac{3}{4}a$, qualunque sia α.

(I)

Prendiamo per asse delle x la linea verticale di simmetria; le y saranno orizzontali. L'elemento di area della luce sarà $2ydx$; e chiamando h la distanza del ciglio della luce dalla superficie di livello la sua portata sarà $2mydx\sqrt{2g(h+x)}$, m disegnando un fattore dipendente dalla contrazione della vena. In conseguenza la portata dell'intera luce sarà $2m\sqrt{2g}\int ydx(h+x)^{1/2}$. D'altronde chiamando H l'altezza, alla quale è dovuta la velocità media dell'efflusso, la portata della luce sarà ancora espressa da $mf\sqrt{2gh}$, f disegnandone l'area. Quindi per determinare H si ha l'equazione

$$f\sqrt{H}=2\int ydx(h+x)^{1/2},$$

nella quale sostituendo ad y la funzione di x determinata dalla figura della luce, si avrà ad integrare una funzione ad una sola variabile.

FINE DEL PRIMO VOLUME.

ERRATA CORRIGE

DEL PRIMO VOLUME.

Pag.	*ver.*	*Errori*	*Correzioni*
VII	6	pleunasmo	pleonasmo
XIV	10	fu	fa
19	13	$tanga = \frac{X}{Y}$	$tanga = \frac{Y}{X}$
28	27	agiscono	agiscano
44	9	sarebbe	sarà
47	5	portano	partano
Id.	22	sia giunto C	sia giunto in C
49	16	non altezza	non all'altezza
57	26	mostrerebbe	dimostrerebbe
70	20	allontanarsl	allontanarsi
73	24	popoli	poli
77	7	dondo	donde
83	15	dimotrato	dimostrato
89	8	sono verso	seno verso
91	18	dall'uno altro	dall'uno all'altro
100	23	diviena	diviene
129	2 e 5	$\frac{P}{D} + \frac{P'}{D'} kt$	$\left(\frac{P}{D} + \frac{P'}{D'}\right) kt$
139	29	$\frac{v - v}{v}$	$\frac{v' - v}{v}$
155	37	ad alta	ed alto
218	13	vieno	viene
233	19	purchè questa sia in un piano verticale	purchè le ordinate a questa linea siano orizzontali
244	1	cessano	cesserebbero
252	30	potrà	potrebbe
271	2	altrettande	altrettante
280	23 e 30	1g,2991	1g,2932
291	33	orrore	errore
304	11	dasso	desse
313	25	dassero	dessero
319	2	a *pag.*	a *pag.* 264
329	23	chiamano a se	chiamano a loro

Pag.	vers.	Errori	Correzioni
339	29	cui viene	con cui viene
350	25	dell'inferiore	della superiore
371	18	temperatora	temperatura
388	17	soperficie	superficie
399	10	dei coincidenze	di coincidenze
400	23	nomo	nome
Id.	27	cui convengono	in cui convengono
404	5	*bemollo*	*bemolle*
409	10	lasciavano	restavano
410	31	un pannolino	con un pannolino
412	1	dirigge	dirige
Id.	3	dia	darà
416	35	della	dalla
429	17	cui	ai quali